Leonardo Fibonacci

Ritratto Leonardo Fibonacci a 17 anni

Statua di Leonardo, Camposanto di Pisa, 1863

La vita e le Opere

Tutto ciò che sappiamo sulla vita e le opere di Leonardo Fibonacci lo dobbiamo alla meticolosa ricerca fatta da Baldassare Boncompagni i cui risultati sono riportati in

Della Vita e delle Opere di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo.
Notizie raccolte da Baldassare Boncompagni (1851-1852)

Altre informazioni si trovano nell'opera
"Histoires des sciences mathématiques"
dello storico della matematica francese Libri

Ed inoltre dalle
"Memorie istoriche di più uomini illustri Pisani"
di Grimaldi stampato a Pisa nel 1790 presso Ranieri Prosperi

La vita: il nome

L’anno probabile di nascita è il 1170, quello della morte il 1242
L’ultima sua notizia biografica documentata è una delibera del comune di Pisa, datata 4 novembre 1241 con la quale si conferisce a «Maestro Leonardo Bigollo» un salario annuo per aver prestato consulenze di tipo amministrativo e, probabilmente, per aver insegnato la matematica.

Fibonacci significa figlio di Bonaccio. Però … in mancanza d'altro sulla vita di Leonardo c’è stata una disputa infinita su Figlio di Bonaccio occupati o dei figli di Bonaccio? Leonardo aveva forse dei fratelli? non si sa. E' possibile anche che Leonardo Pisano fosse discendente, e non già figlio di Bonaccio, da un Bonaccio anteriore: egli apparteneva cioè alla famiglia dei Fibonacci.
Nel *Vocabolario degli accademici della Crusca Quarta impressione* si legge: "FI, figliuolo. Di questo congiunto col nome del padre, o del primo antenato si formava talora il cognome delle famiglie nostre, come Filipetri, Filiromoli, Firidolfi; laonde Dante non costretto da necessità, ma secondo l'uso del suo tempo disse, Par. II. :
***Nè gli gravò viltà di cuor le ciglia Per esser fi di Pietro Bernardone* (E la vergogna di essere figlio di Pietro Bernardone ed il suo aspetto da mendicante da destare meraviglia non gli fece abbassare lo sguardo) "**

La vita: il nome

Dall'incipit o Prologo del suo *Liber Abbaci* sembra però che effettivamente fosse figlio di Bonaccio.

Più precisamente Il Grimaldi nelle sue "*Memorie istoriche di più uomini illustri Pisani*" scrive:

«Non per altra cagione adunque Leonardo il cognome porta di Fibonacci, se non pel nome del Padre, che Bonacci, o Bonaccio appellavasi, come per non pochi esempli sappiamo dal volgo, o dall'uso di formarsi i cognomi. Egli medesimo lo afferma nel dar principio alla sua opera *Opera dell'Abaco*, scrivendo "*Incipit Liber Abbaci compositus a Leonardo filio Bonacci in anno* MMCCII">>.

La vita: il nome

Di sicuro Leonardo Pisano ebbe il soprannome di Bigollone, o Bigollo o Bigolloso. Se ne hanno le prove perché (Della vita e delle opere di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo. Notizie raccolte da Baldassare Boncompagni)

1. **Nel *recto* della seconda carta d'un Codice della Biblioteca Magliabechiana di Firenze contrassegnato Palchetto III. n. 22 si legge: *Incipit practica geometrie composita a leonardo Bigollosie filio Bonacij Pisano in anno* M.CC.XXI**
2. **Nel *recto* della carta 83 d'un Codice posseduto dal Sig. Conte Petronio Isolani di Bologna si legge il titolo seguente in lettere rosse: *Incipit practica Geometrie composita a Lionardo Bigollo filiorum***
3. **Un codice della Biblioteca Nazionale di Parigi, contrassegnato *Ancien Fonds Manuscript latin* n. 7223 ha nel *recto* della prima carta il titolo seguente: *Incipit practica geometrie composita a Leonardo Bigollosie filio Bonacij Pisano in anno* M.CC.XXI**

La vita: il nome

La parola *Bigollone* equivale a *Bighellone*, cioè *sciocco, scimunito, scempiato*.
Ma perché questo soprannome?

Il Guglielmini nel suo "Elogio di Lionardo Pisano" scrive:
«Lionardo intanto lungi dal far pompa d'ingegno e di sapere, nascondeva le sue invenzioni in silenzio fralle indiane, fralle arabe, fralle greche dottrine; e per tale savio avvedimento si tolse ai colpi della invidiosa ignoranza, che tacque; ma il commercio di que' giorni, che intento al solo guadagno piangeva il tempo alle scienze donato, alzò voce ingratissima contro di lui, e d'un nome lo caricò, che la gravità del luogo, da cui parlo, mi vieta di pronunciare».

Il Libri nella sua "*Histoires des sciences mathématiques*" scrive:
Questo è tutto ciò che si sa su Fibonacci; nessuno storico contemporaneo lo menziona, e l'anno della sua morte non è nemmeno noto; sappiamo solo che come ricompensa per gli immensi servigi resi alle scienze, gli fu dato il soprannome di "Bigollone", probabilmente perché lo studio delle scienze lo assorbiva completamente, e gli impediva di dedicarsi al commercio, occupazione preferita dai suoi concittadini.

Le Opere

Le opere scritte da Leonardo Fibonacci sono tre tutte scritte in latino e precisamente

- **Il *Liber Abbaci*, il più famoso**
- **Un’opera intitolata *Practica Geometriae***
- **Un trattato sui numeri quadrati, il *Liber Quadratorum***

Queste opere sono molto importanti non solo per il contenuto rivoluzionario per l’epoca, soprattutto la prima e la terza, ma anche perché sono essenzialmente le fonti di tutto ciò che conosciamo della sua vita

Del testo latino di tutto il *Liber Abbaci* esistono vari codici manoscritti come pure della *Practica Geometriae*. Il testo latino della terza opera non è giunto interamente a noi ma solamente la lettera dedicatoria ed alcuni brevi passi in forma di manoscritto. Esiste però una sua traduzione in italiano.

Le Opere

Del Liber Abbaci esistono molti manoscritti cinque dei quali sono molto antichi:

1. **Il Codice L.IV.20. della Biblioteca Pubblica Comunale di Siena, nel quale si legge:**

   Incipit Abbacus Leonardi de domo filiorum bonacii pisani compositus A. M°. CC°.II°.
2. **Il Codice Palatino n. 1343 della Biblioteca Vaticana, nel quale si legge:**

   Incipit liber Abbaci compositus a leonardo filiorum bonacij pisano in anno 1202.
3. **Il Codice Magliabechiano proveniente dalla Badia di Firenze intitolato:**

   Incipit liber Abaci Compositus a Leonardo filio Bonacii Pisano. In Anno M°. CC°.ij°.
4. **Il Codice Magliabechiano contrassegnato Classe XI. n. 21 intitolato:**

   Incipit liber Abbaci compositus a Leonardo filio bonacii pisano in anno M°. CC°.ij°.
5. **Il Codice Riccardiano n. 783 nel quale si legge:**

   Incipit liber abbaci compositus a leonardo filiorum bonacij pisano in anno M CC°.ij.

Le Opere

È fuori dubbio che Leonardo Fibonacci compose il suo Liber Abbaci nel 1202. Questo implica che egli sia nato nella seconda metà del dodicesimo secolo (da notare che il Sig. Chasles nel suo *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie de sciences* tomo XIII (1841) scrive:
"L'epoca in cui visse Fibonacci è rimasta a lungo sconosciuta; i bibliografi italiani l'hanno posta all'inizio del XV secolo. È solo dalla metà del secolo scorso che si sa che il suo Abbacus porta la data 1202"

Nel 1228 Leonardo Fibonacci fece una seconda edizione riveduta e corretta del Liber Abbaci. Ciò si deduce da altri quattro codici che riportano nell'incipit:
...compositus a leonardo filiorum bonacij pisano in anno 1202 et correctus ab eodem 28

Nel prologo di questa edizione dedicata a Michele Scoto si fa riferimento all'altra opera di
Leonardo, *Practica Geometriae* che è del 1220. Sempre dal prologo otteniamo molte notizie sulla sua vita:

Le Opere

Nel prologo dell'edizione del 1228 dedicata a Michele Scoto si fa riferimento all'altra opera di Leonardo, *Practica Geometriae* che è del 1220. Sempre dal prologo otteniamo molte notizie sulla sua vita:

"...Quando mio padre, scrivano pubblico presso la dogana di Bugia per conto dei mercanti pisani, fu incaricato di dirigerla, essendo io ancora fanciullo mi fece andare presso di lui. Essendosi reso conto dell'utilità e dei vantaggi che me ne sarebbero venuti in seguito, volle che là per un certo tempo stessi a studiare l'abaco e su esso venissi istruito. Ivi fui introdotto in tale arte da un mirabile insegnamento per mezzo delle nove figure degli Indi. La conoscenza di tale arte molto mi piacque rispetto alle altre. Successivamente con studio assiduo e impegnandomi in discussioni, giunsi a comprendere quanto di essa si studiava in Egitto, Siria, Bisanzio, Sicilia e Provenza, luoghi che ripetutamente visitai per i miei viaggi commerciali."

Il *Liber Abbaci*

I 15 capitoli

1. Sulla conoscenza delle nove figure indiane, e come con esse si scriva ogni numero, e quali numeri, e come si debbano tenere sulle mani e introduzione dell’abaco
2. Sulla moltiplicazione dei numeri interi.
3. Sulla addizione dei numeri interi.
4. Sulla sottrazione di numeri minori da numeri maggiori.
5. Sulla divisione di numeri interi per numeri interi.
6. Sulla moltiplicazione di numeri interi per frazioni e di frazioni senza interi.
7. Sulla addizione, sottrazione e divisione di numeri interi con frazioni e riduzione delle parti dei numeri in singole parti.
8. Sull’acquisto e vendita di merci e simili.
9. Sui baratti delle merci, acquisto di bolzonaglie e alcune regole simili..
10. Sulle società fatte fra consoci.
11. Sulla fusione di monete e delle loro regole, pertinenti alla fusione.
12. Sulla soluzione di questioni di varia natura dette muscellanee.
13. Sulla regola della doppia falsa posizione, come per essa si possano risolvere quasi tutte le varie questioni miscellanee.
14. Sulla determinazione delle radici quadrate e cubiche e la moltiplicazione e divisione e somma e estrazione di queste radici tra di loro e dei recisi e delle loro radici.
15. Sulle regole e proporzioni pertinenti alla geometria: questioni di algebra e almuchabala.

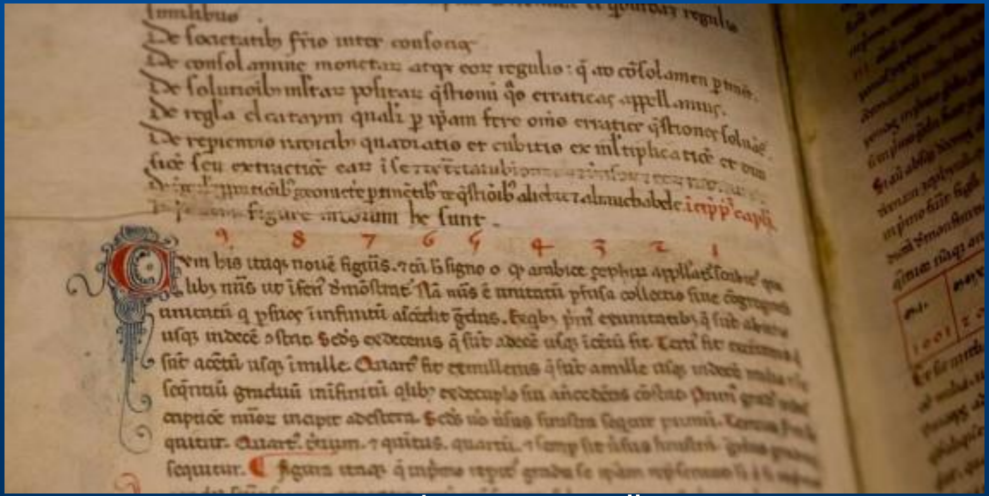
Il *Liber Abbaci*

Il primo capitolo comincia così:

Incipit capitulum primum. -- Novem figurae Yndorum he sunt
VIIII. VIII. VII. VI. V. IIII. III. II. I.
9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.

Inizia il primo capitolo. -- Queste sono le nove figure degli indiani.
VIIII. VIII. VII. VI. V. IIII. III. II. I.
9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.

Con queste nove figure, e con il segno 0 che gli arabi chiamano zephir, si scrive qualsiasi numero, come è mostrato di seguito.



Il *Liber Abbaci*

Le cose notevoli del *Liber Abbaci*:

Per Leonardo ci sono le nove figure (cifre) ed inoltre il segno 0. Lo zero non è considerato un numero ma semplicemente un ’’posto vuoto’’

Zefiro è una parola di origine greca (Zèphiros) che indicava anche un personaggio mitologico, personificazione del vento di ponente; il termine è passato in latino nella forma zèphyrum, e venne spesso preferito a favonium, nome latino che indicava lo stesso vento. Il passaggio all’italiano non presenta variazioni notevoli: abbiamo infatti *zefiro.*

Il termine zero, e ancor prima l’idea stessa del nulla matematico (nei numeri greci e latini, infatti, non esisteva), deriva dall’arabo, e precisamente dalla parola sifr ‘nulla’. Quando, agli albori del Duecento Leonardo Fibonacci si trovò a dover tradurre quel termine, scelse, probabilmente per paragonarlo all’inconsistenza del vento, proprio la parola zephyrus! Questa si è poi evoluta in italiano prima in zefro o zevro e finalmente in zero. Ma il termine arabo, sifr, non è stato abbandonato, ed è entrato anch’esso direttamente nella nostra lingua: è infatti alla base del nostro cifra ‘segno numerico’.

Lo zero: Storia di una Cifra

La storia dello zero è una storia molto accidentata.

- Fu introdotto una prima volta dai Babilonesi tra il VI ed il III secolo a.C. per ovviare ad un problema di ambiguità nel loro sistema posizionale. Indicava però l'assenza di un numero
- Con la conquista da parte di Alessandro Magno del mondo babilonese pervenne una prima volta nel mondo ma non fu accolto favorevolmente dai Greci dediti come erano soprattutto alla geometria.
- Fu utilizzato più tardi essenzialmente dagli astronomi. Tolomeo nel suo Almagesto, siamo nel II secolo d.C., lo utilizza per indicare i gradi e le sue frazioni sessagesimali: così scriveva $\overline{\mu\alpha}\,\widetilde{0}\,\overline{\iota\eta}$ per $41^{o}\,00'\,18''$ e $\widetilde{0}\,\overline{\lambda\gamma}\,\overline{\delta}$ per $00^{o}\,33'\,04''$
- Lo zero babilonese sempre per opera di Alessandro Magno giunse in India dove venne assimilato assieme ad altri concetti soprattutto astronomici del mondo ellenico: il termine hindū *kendra* deriva da *kéndron*, «centro», e *lipta* da *leptón*, «minuto». Si trova il simbolo dello zero, lo stesso dei Greci, in una incisione su una tavoletta di pietra datata 876 d.C.
- Dopo varie peripezie lo zero giunge infine nel mondo arabo e da qui tramite Leonardo in Europa. Anche per Leonardo lo zero rappresenta un posto vuoto, nessuna unità, nessuna decina: insomma il nulla (tuttora in inglese per indicare lo zero si usa a volte il termine *'null'* dal latino *'nulla figura'*) .

Fu solo con lo sviluppo della contabilità a partita doppia che lo zero (parità di bilancio) ed i numeri negativi (debiti) divennero numeri a tutti gli effetti come ben descritto nella *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* di Luca Pacioli.

Il *Liber Abbaci*

Torniamo al *Liber Abbaci*:

- I primi sette capitoli si occupano di aritmetica. E’ qui che viene introdotto il sistema arabo-indiano posizionale che però trovò notevoli difficoltà ad essere accettato per vari motivi: non esistendo ‘’carta e penna’’ era molto più pratico e senz’altro molto più veloce da parte dei mercanti continuare ad utilizzare l’abaco; nel 1280 la città di Firenze proibì l'uso delle cifre indo-arabe da parte dei banchieri, alcuni dei quali pare falsificassero lo zero a loro vantaggio, modificandolo in 6, 8 o 9. Dall’indice dei capitoli si nota che Leonardo si occupa prima delle operazioni con i numeri interi per passare poi ai ‘’numeri’’ frazionari: le frazioni non sono mai improprie e soprattutto vengono preferite solamente frazioni con numeratore uguale a 1. Leonardo fornisce metodi, complicati, e tavole per trasformare le frazioni: per esempio 9/11 viene scritto come 1/44+1/22+1/4+1/2. (come nell’antico Egitto!!)

- I capitoli dall’ottavo al tredicesimo riguardano questioni relative a vari problemi pratici: un vero trattato di ragioneria; nel dodicesimo ci sono numerosi problemi di matematica ricreativa.

- Con i due ultimi capitoli si ritorna all’aritmetica: troviamo qui gli algoritmi per calcolare le radici quadrate e cubiche e le regole di calcolo per radicali quadratici e cubici. Infine viene introdotto il primo vero trattato di algebra scritto in lingua latina precedendo lo sviluppo vero e proprio di questa disciplina di almeno tre secoli e mezzo (Viete 1540-1603).

Il *Liber Abbaci*

Il dodicesimo capitolo, quello che tratta problemi di matematica ricreativa è molto importante per due ragioni:

1) Dalla descrizione di un problema apprendiamo che Leonardo sul finire del XII secolo si trovava a Costantinopoli e tenne delle relazioni con alcuni matematici di quella città. Leggiamo infatti: ‘’Una domanda sulla stessa questione ci è stata posta a Costantinopoli da un certo maestro. Inoltre, se si propone che uno di loro chieda all'altro 7 denari e abbia cinque volte tale importo, e il secondo chieda al primo 5 denari e abbia sette volte tale importo, ecc.’’ Per inciso la soluzione fornita da Leonardo è: 7+2/17 per il primo uomo e 9+14/17 per il secondo. Essa è stata ottenuta con un metodo che potremmo dire algebrico.

2) Più oltre un problema dal titolo: ‘’*Quot paria coniculorum in un anno ex uno pario germinantur*’’. (Quante paia di conigli sono generati in un anno da una coppia sola). Si tratta del famosissimo problema dei conigli che dà origine alla altrettanto famosissima Successione di Fibonacci.

Da notare che il problema dei conigli è solamente uno dei circa 400 problemi presenti nel dodicesimo capitolo.

La *Successione di Fibonacci*

Un tale mise una coppia di conigli in un posto, che era circondato dappertutto da un muro, per sapere quante paia sarebbero nate in un anno, essendo nella loro natura di partorire ogni mese un'altra coppia, e partoriscono nel secondo mese dalla loro nascita. Poiché la coppia sopra citata partorisce nel primo mese, la raddoppierai, saranno due coppie in un mese. Una di queste, cioè la prima, genera nel secondo mese, e così nel secondo mese ci sono 3 coppie; due delle quali in un mese sono ingravidate; e nel terzo mese sono generate 2 coppie di conigli, e così ci sono 5 coppie nello stesso mese; ….

…. E sommate a queste anche le 144 coppie che hanno partorito nell'ultimo mese, saranno 377 coppie, e tante coppie ha partorito la coppia sopra citata nel luogo predetto in capo a un solo anno. Puoi infatti vedere in questo margine in che modo abbiamo operato, cioè che abbiamo aggiunto il primo numero col secondo, cioè 1 con 2; e il secondo con il terzo, e il terzo con il quarto, e il quanto con il quinto, e così via, finché abbiamo aggiunto il decimo con l'undicesimo, cioè 144 con 233, e abbiamo ottenuto il totale dei conigli sovracitati, cioè 377; e così potresti fare in ordine per numeri infiniti di mesi

coppia
1
primo
2
secondo
3
terzo
5
quarto
8
quinto
13
sesto
21
settimo
34
ottavo
55
nono
89
decimo
144
undicesimo
233
dodicesimo
377

Il numero di coppie presenti ad un certo mese è la somma delle coppie dei due mesi precedenti

Il *Liber Quadratorum*

A proposito di Leonardo Pisano Andrè Weil nella sua ‘Teoria dei Numeri’ scrive

‘’Al contrario della più conosciuta opera di Fibonacci, il *Liber Abaci*, il *Liber Quadratorum* venne del tutto dimenticato; fu con grande difficoltà che una copia venne individuata dal principe Boncompagni che la pubblicò nel 1856. … Non sarà qui fuori luogo qualche parola su Fibonacci e il suo *Liber Quadratorum.* … Quando l’imperatore Federico II soggiornò a Pisa, Leonardo fu introdotto nell’ambiente di corte, a quel tempo punto di incontro delle culture latina, araba e greca: è facile immaginare che Leonardo stesso avesse una certa familiarità con tutte e tre queste lingue. Seguendo il costume del tempo, tenne alla presenza di Federico dispute con gli eruditi dell’enturage imperiale. In un’occasione fu sfidato a trovare tre quadrati in progressione aritmetica con differenza 5: in altre parole, e usando la notazione algebrica moderna, a risolvere

$$y^2 - x^2 = z^2 - y^2 = 5$$

in numeri razionali, o cosa che è equivalente

$$Y^2 - X^2 = Z^2 - Y^2 = 5T^2$$

in interi. Questo divenne l’oggetto del *Liber Quadratorum*.’’

Il *Liber Quadratorum*

La soluzione, ottenuta da Leonardo con un metodo interessante e in apparenza originale fu

$$\mathbf{31^2}, \quad \mathbf{41^2}, \quad \mathbf{49^2}$$

mediante la quale si ottengono i numeri richiesti che sono

$$\mathbf{2\frac{7}{12}}, \quad \mathbf{3\frac{5}{12}}, \quad \mathbf{4\frac{1}{12}}$$

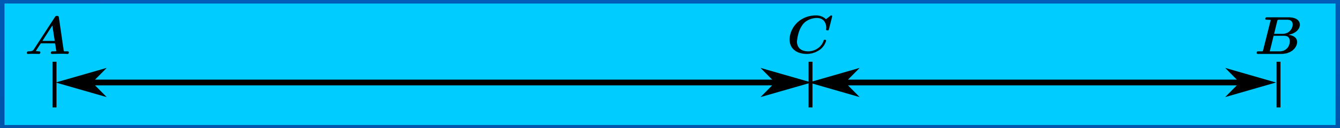
i cui quadrati sono in progressione aritmetica con differenza 5

Leonardo osservò che otre al numero 5 altri numeri godono della stessa proprietà, ad esempio il 7, ma che ciò non è vero per molti altri numeri. Anzi affermò che la differenza non può mai essere un quadrato, fornendo però una dimostrazione non del tutto corretta, dimostrazione che fu ottenuta da Fermat dopo più di 400 anni.

Bisogna proprio dire che in questo campo Leonardo era in anticipo sui tempi!!!

La Sezione Aurea

Euclide, nel libro VI degli Elementi, definisce così la proporzione estrema e media: “una linea retta è divisa secondo la proporzione estrema e media quando l’intera linea sta alla parte maggiore così come la maggiore sta alla minore”.



$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AC} : (\overline{AB} - \overline{AC})$$

Se poniamo $\overline{AB} = 1$ e $\overline{AC} = \varphi$ allora è $\varphi : 1 = 1 : (\varphi - 1)$ e poichè il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi:

$$\varphi(\varphi - 1) = \varphi^2 - \varphi = 1$$

da cui la relazione fondamentale

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

L’interesse di Euclide per questo rapporto è dovuto al fatto che se il lato di un pentagono regolare ha lunghezza unitaria allora la lunghezza di una sua diagonale è proprio φ. Lo stesso rapporto c’è tra il lato di un decagono regolare ed il raggio del cerchio circosritto.

La Sezione Aurea

Ma da dove viene il nome *''Sezione Aurea''* dato al valore di φ e perché viene utilizzato proprio il simbolo φ?

- Euclide era interamente concentrato sugli aspetti matematici del rapporto e non gli ha dato nessun nome
- Nel 1509 Luca Pacioli, cha abbiamo già incontrato a proposito della partita doppia, pubblica il suo trattato in tre volumi intitolato *''De Divina Proporzione''* che è anche il nome 'provvisorio' dato al rapporto φ.
- Il nome di ''Sezione Aurea'' per il rapporto φ sembra essere stato utilizzato per la prima volta nel 1835 da Martin Ohm, fratello del più celebre Georg Simon Ohm.
- L'uso invece della lettera φ per indicare il suo valore numerico è molto più recente: lo si deve al matematico Mark Barr che la scelse nel 1929 perché φ è l'iniziale di Fidia il supervisore della costruzione del Partenone di Atene.

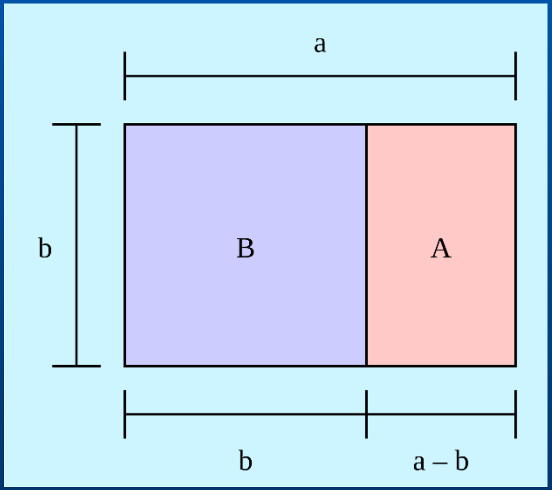
Keplero è stato affascinato dalla *Divina Proporzione* tanto che scrive: ***"La geometria possiede due grandi tesori: uno è il teorema di Pitagora; l'altro la divisione di una linea secondo il rapporto estremo e medio. Possiamo paragonare il primo a una certa quantità d'oro, e definire il secondo una pietra preziosa".***

Fra l'altro è proprio Keplero a riconoscere per primo il legame tra Sezione Aurea e Successione di Fibonacci

Il Rettangolo Aureo

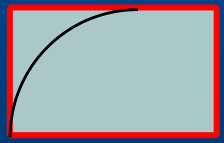
Da wikipedia:
Il **rettangolo aureo** è un rettangolo le cui proporzioni sono basate sulla proporzione aurea. Ciò significa che il rapporto fra il lato *maggiore* e quello *minore*, **a : b**, è identico a quello fra il lato minore e il segmento ottenuto sottraendo quest'ultimo dal lato maggiore **b : a−b** (il che implica che entrambi i rapporti siano φ).

Ciò implica che:
- se ad un **rettangolo aureo** aggiungiamo un quadrato di lato uguale al lato maggiore del rettangolo otteniamo un altro **rettangolo aureo**
- se ad un **rettangolo aureo** sottraiamo un quadrato di lato uguale al lato minore del rettangolo ciò che rimane è un altro **rettangolo aureo**



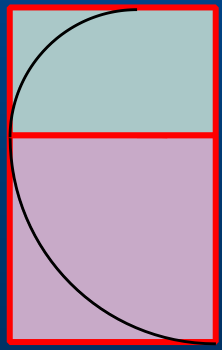
Il Rettangolo Aureo

Partiamo da un rettangolo aureo..



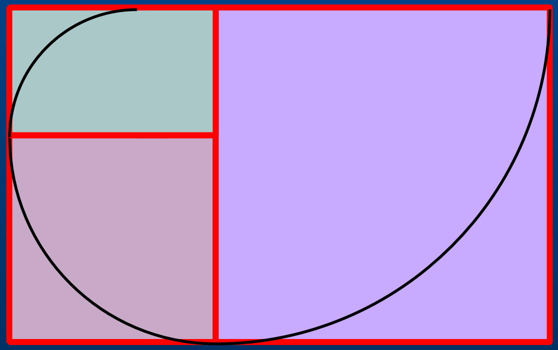
Il Rettangolo Aureo

Partiamo da un rettangolo aureo.. ed aggiungiamo un quadrato



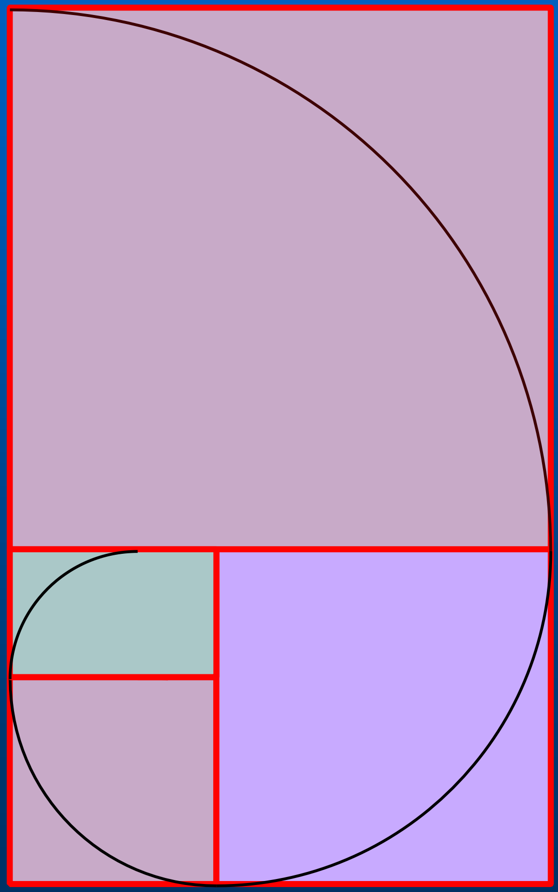
Il Rettangolo Aureo

aggiungiamo un altro quadrato



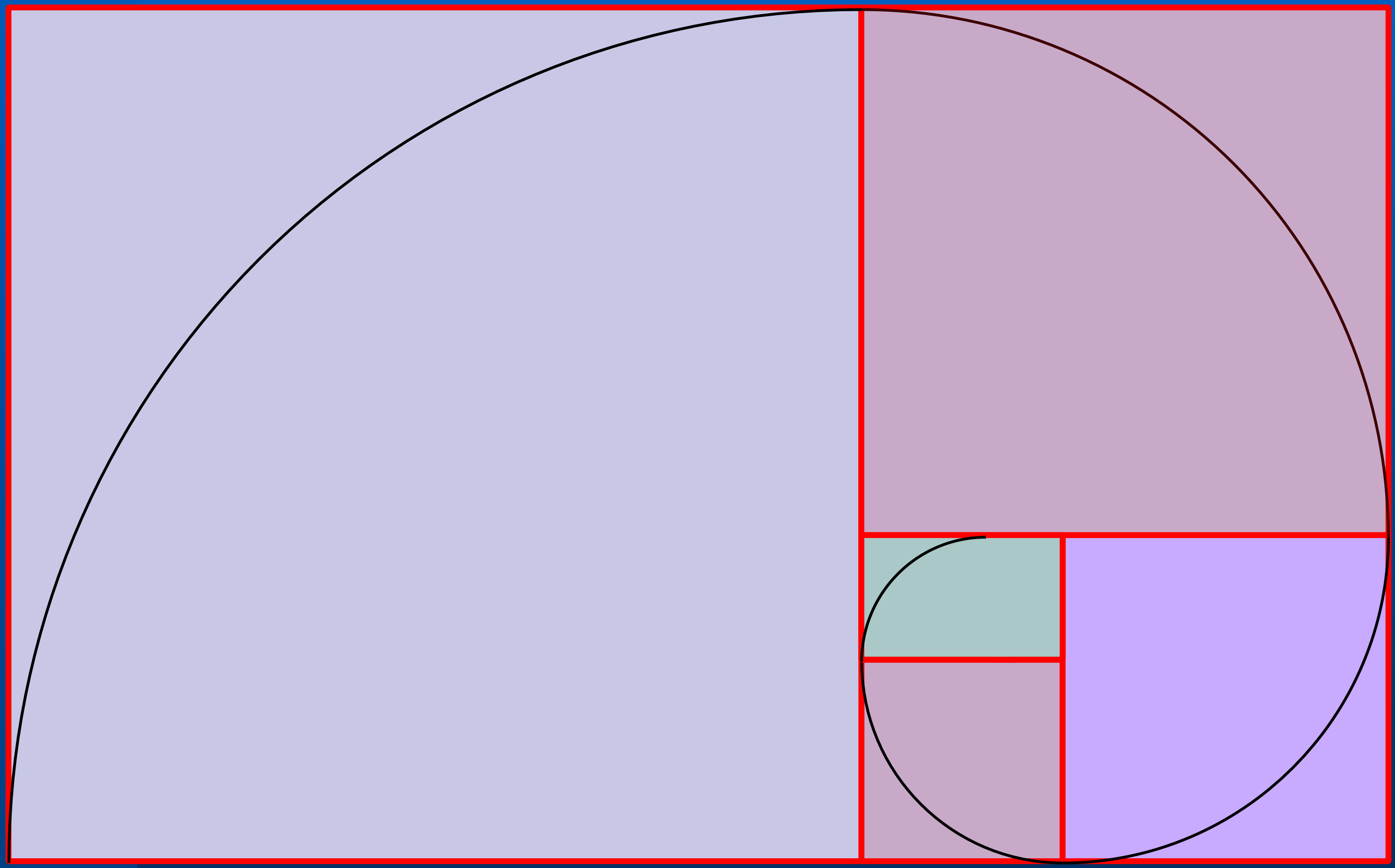
Il Rettangolo Aureo

ancora un altro quadrato



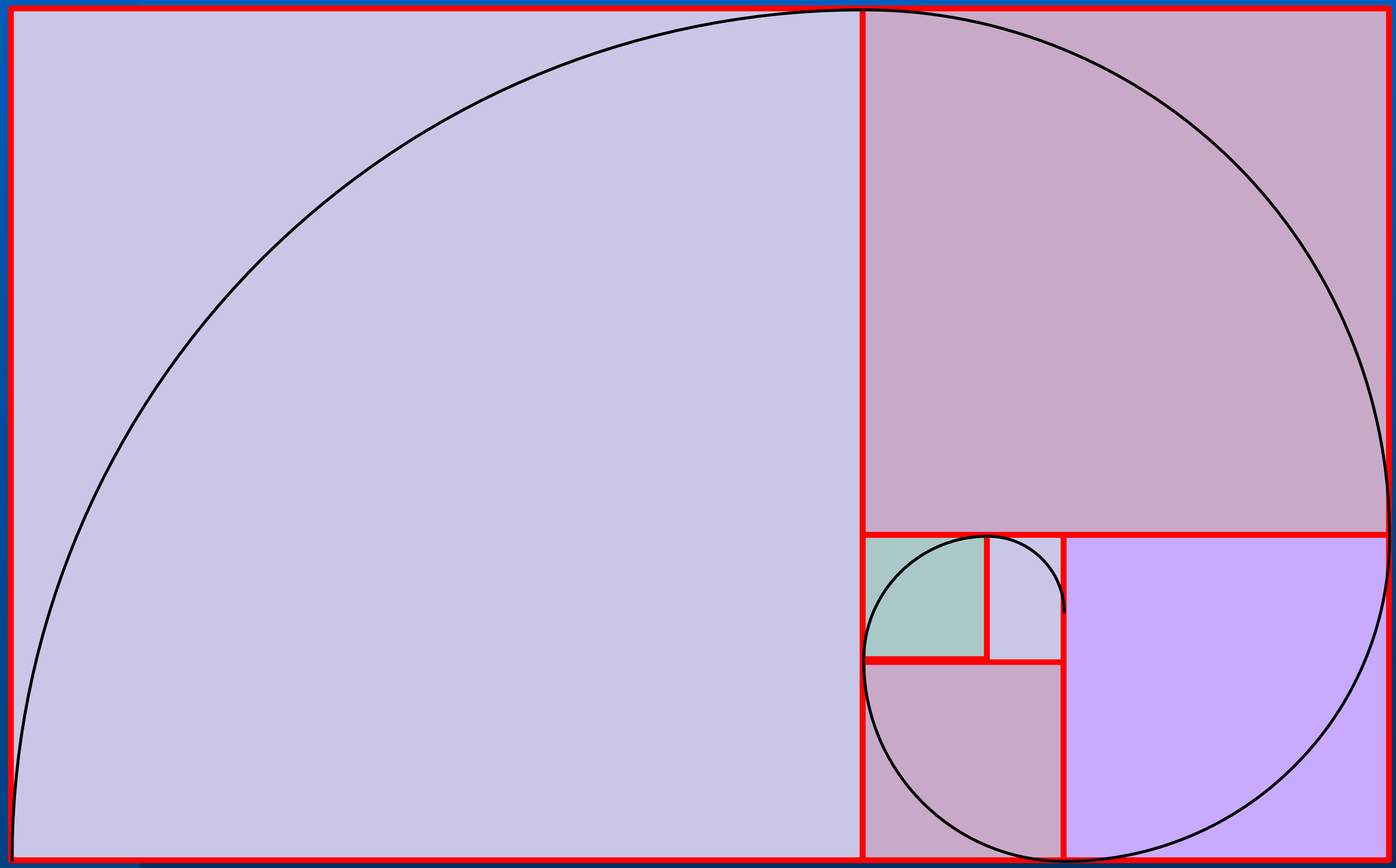
Il Rettangolo Aureo

ancora un altro quadrato. E così all'infinito …



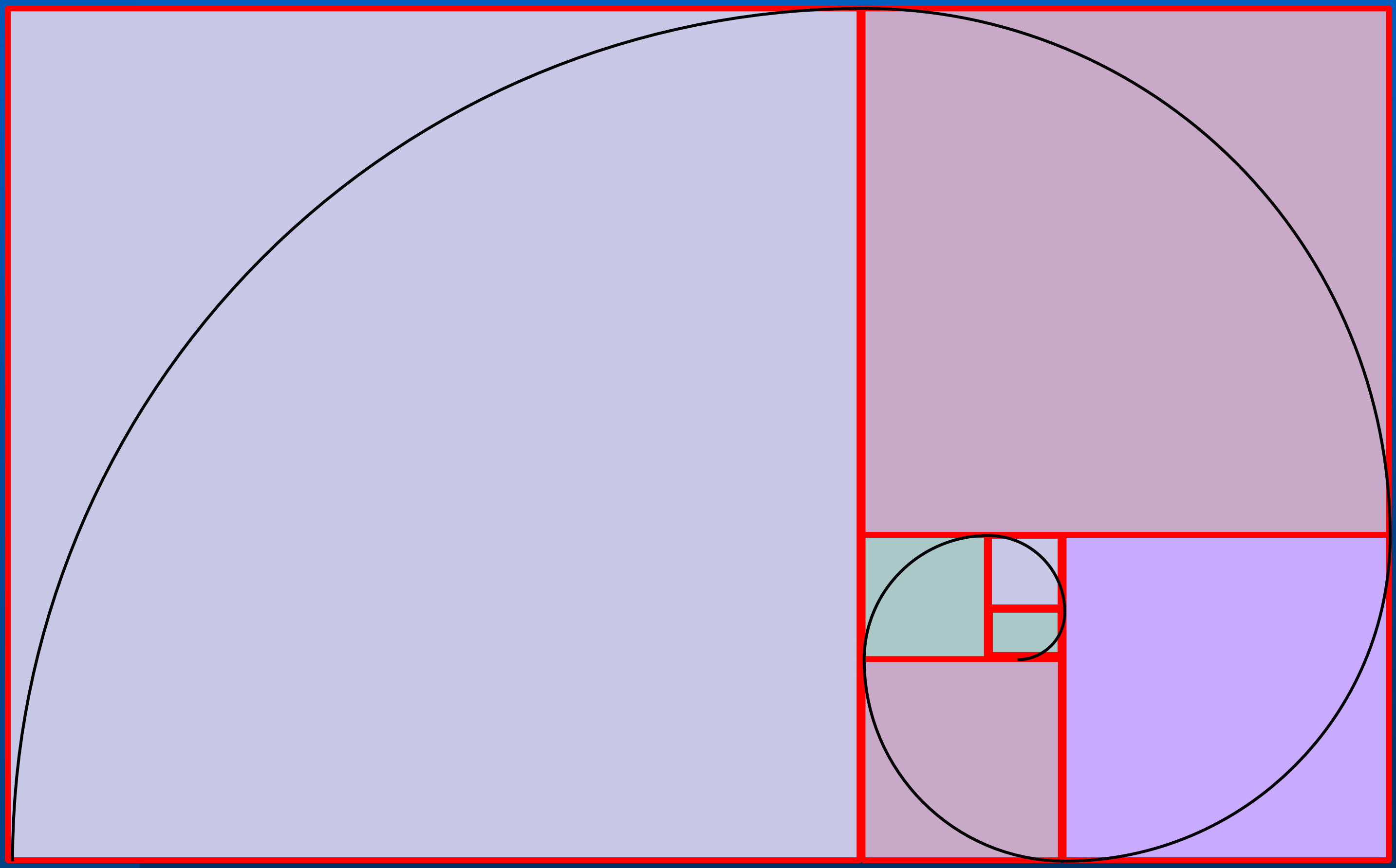
Il Rettangolo Aureo

Ma possiamo anche sottrarre un quadrato al rettangolo originale..



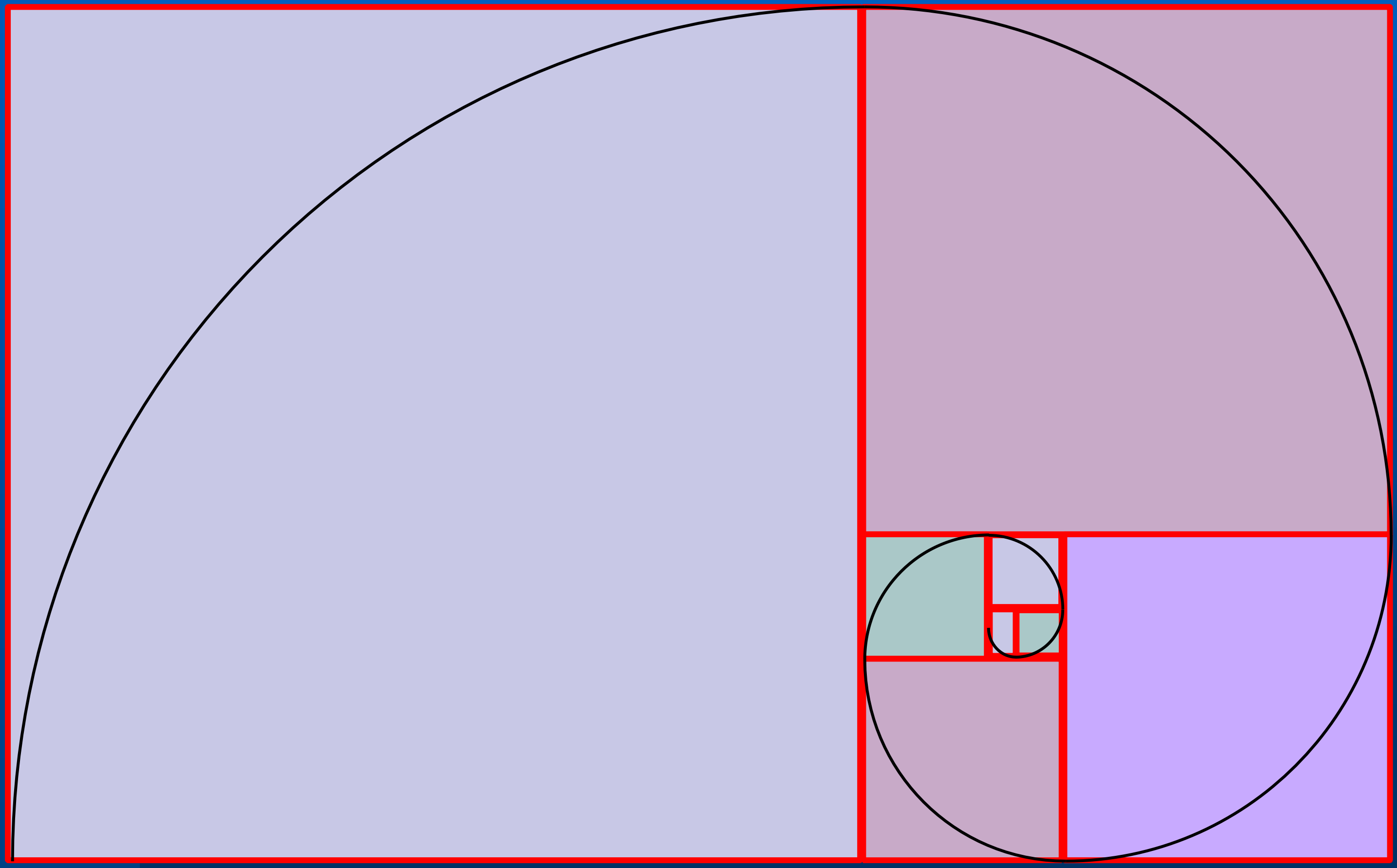
Il Rettangolo Aureo

Sottraiamo un altro quadrato



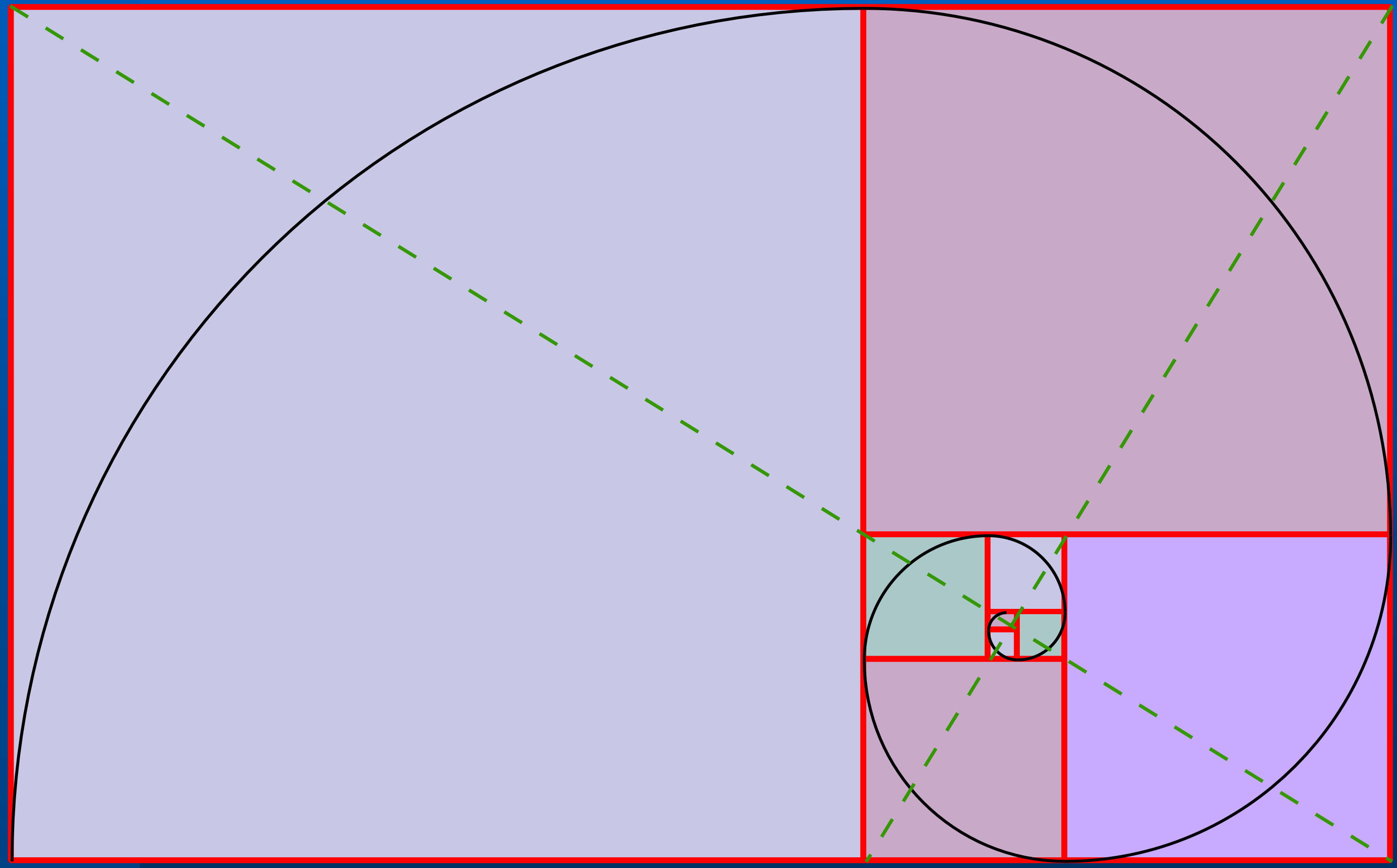
Il Rettangolo Aureo

ancora un altro quadrato



Il Rettangolo Aureo

ancora un altro quadrato. E così all'infinito …

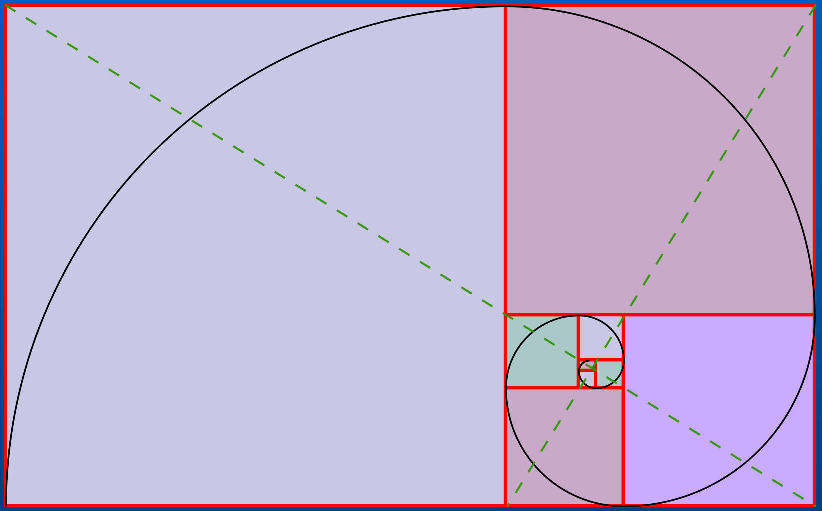


Il Rettangolo Aureo

Cominciamo ad intravvedere un primo legame fra la successione di rettangoli aurei e la successione di Fibonacci

- La lunghezza del lato maggiore/minore di un rettangolo aureo è uguale alla somma dei lati maggiori/minori dei due rettangoli che lo precedono.

- L'ennesimo termine della successione di Fibonacci è uguale alla somma dei due termini che lo precedono.

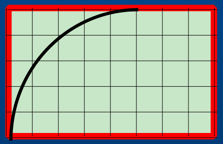


Il numero di coppie di conigli che ci sono in un mese è dato dalla successione
1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 …

Per successione di Fibonacci si intende però la sequenza
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 …

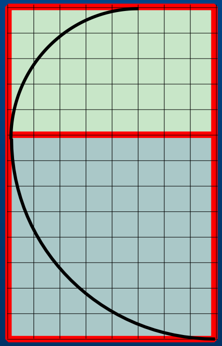
Il Rettangolo di Fibonacci

Partiamo da un rettangolo di Fibonacci..



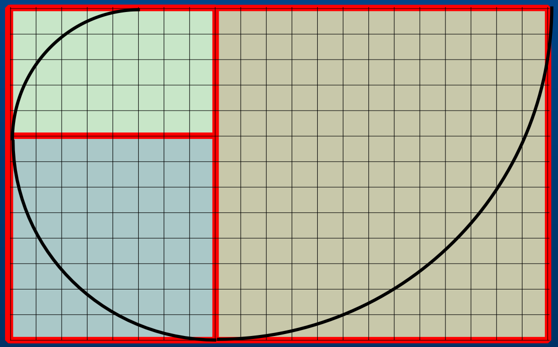
Il Rettangolo di Fibonacci

Partiamo da un rettangolo di Fibonacci.. ed aggiungiamo un quadrato



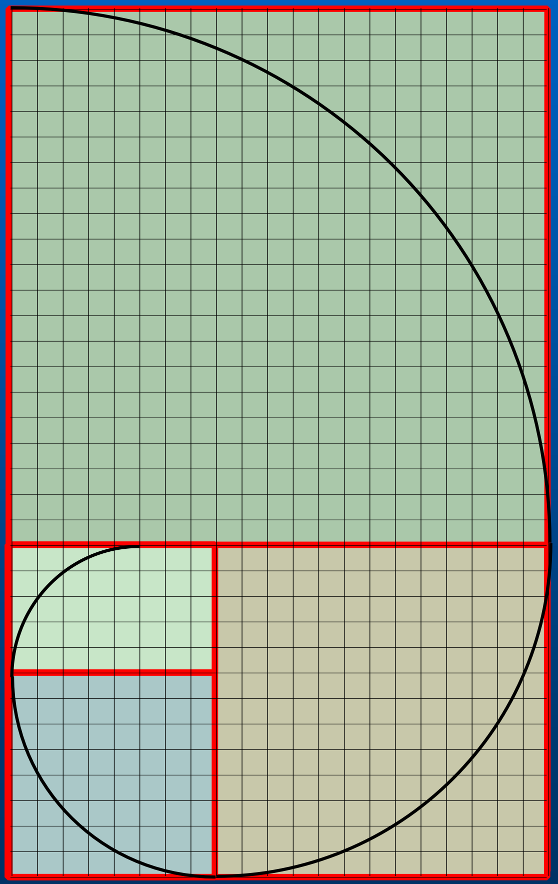
Il Rettangolo di Fibonacci

aggiungiamo un altro quadrato



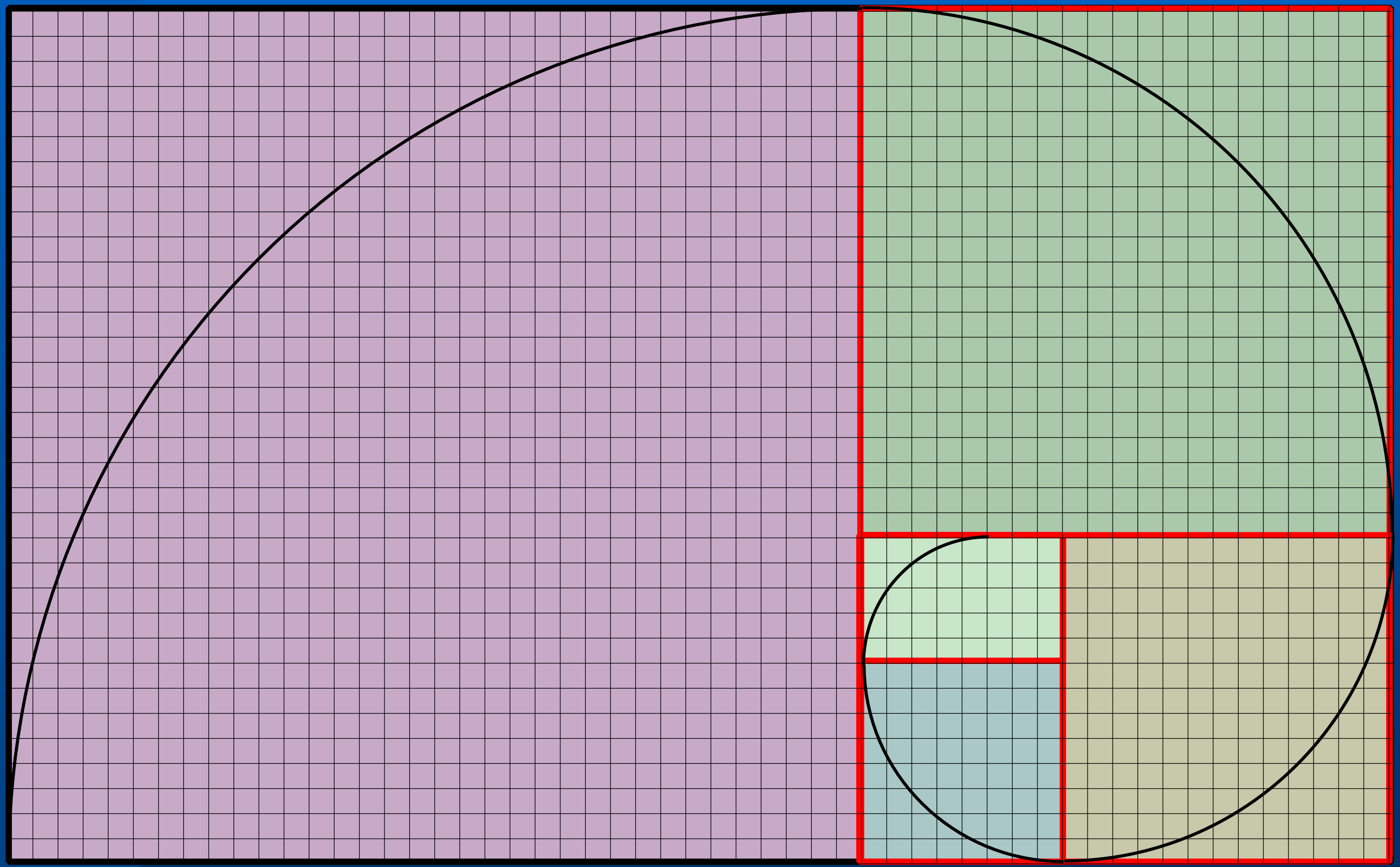
Il Rettangolo di Fibonacci

ancora un altro quadrato



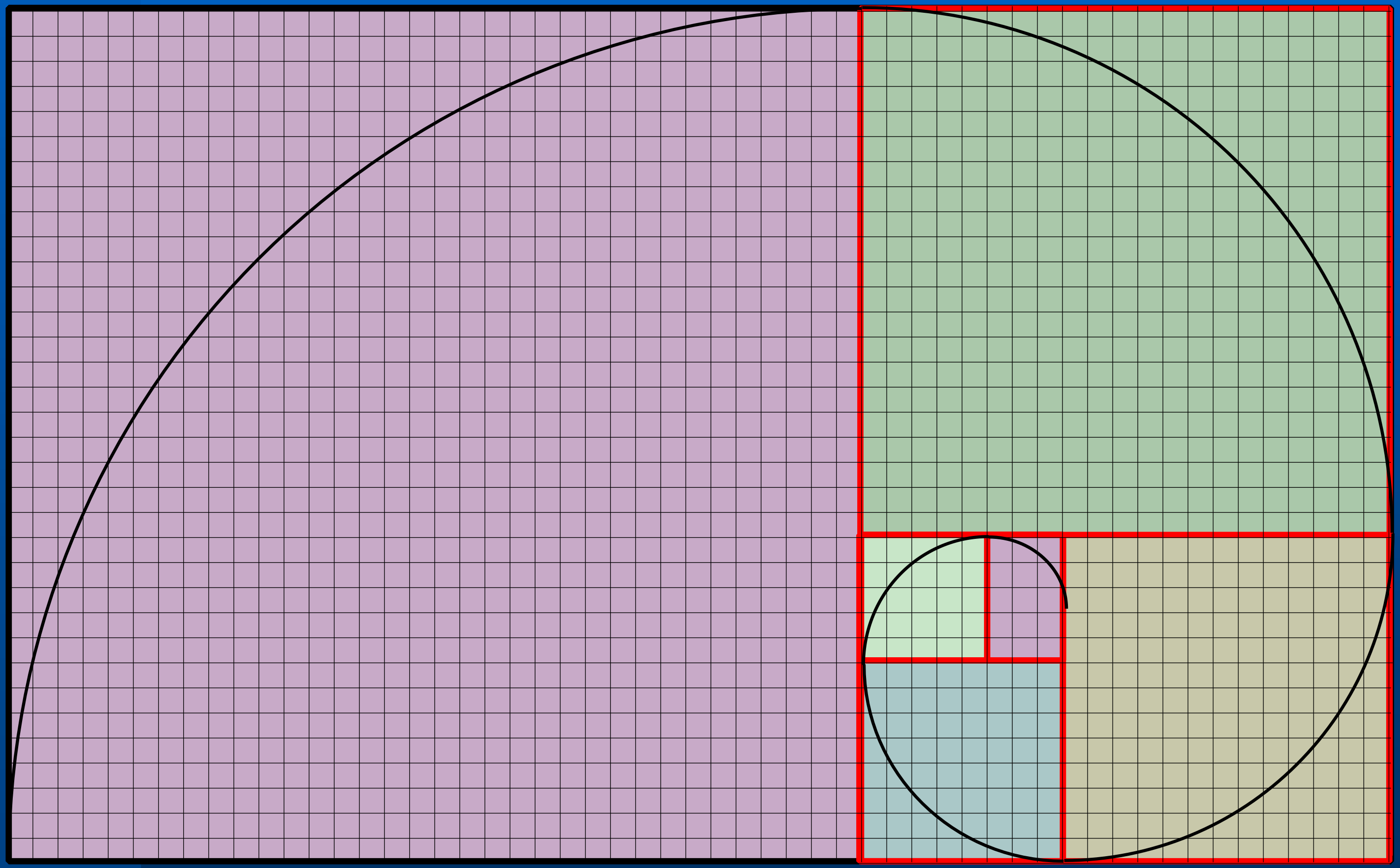
Il Rettangolo di Fibonacci

ancora un altro quadrato. E così all'infinito …



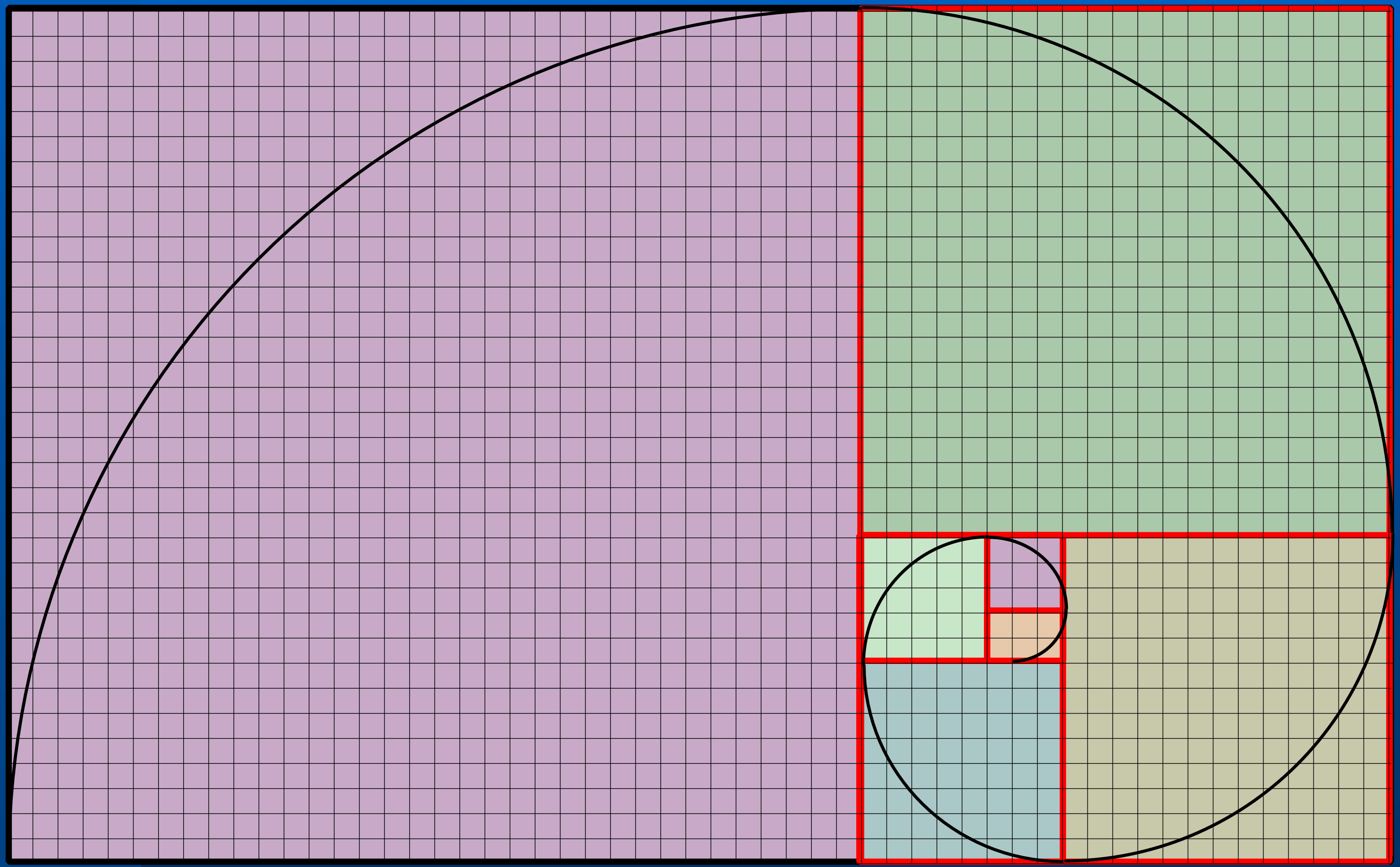
Il Rettangolo di Fibonacci

Ma possiamo anche sottrarre un quadrato al rettangolo originale..



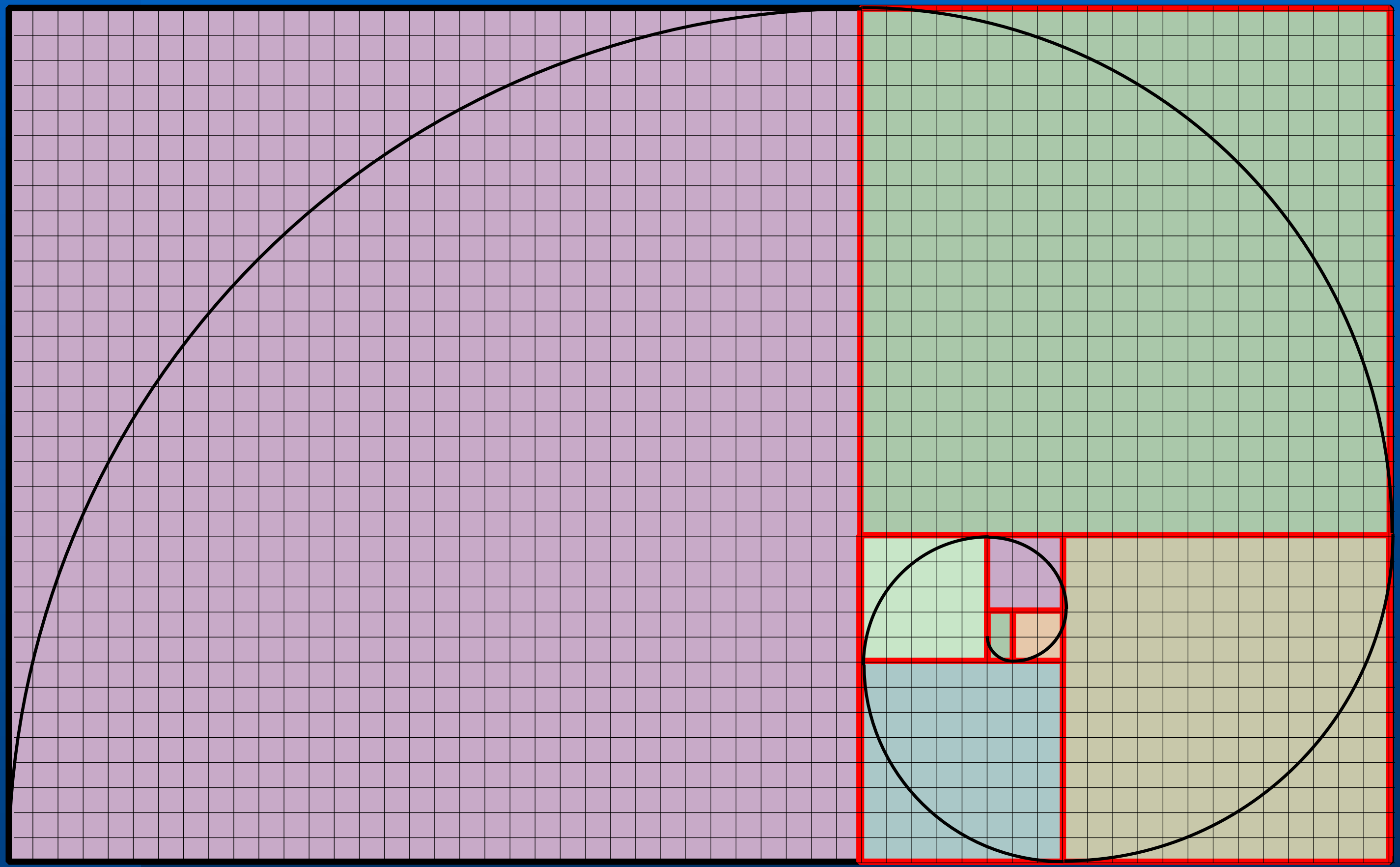
Il Rettangolo di Fibonacci

Sottraiamo un altro quadrato



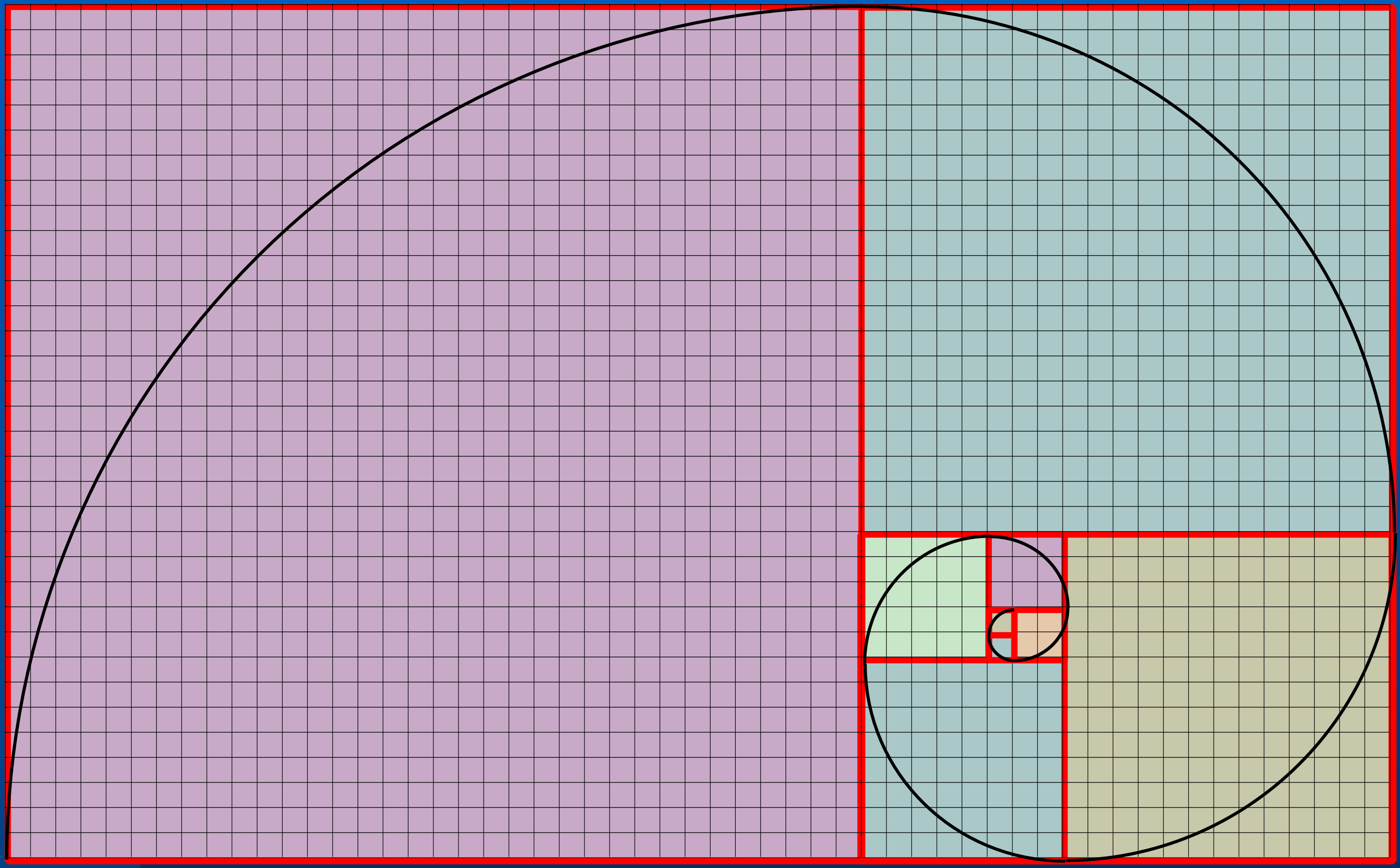
Il Rettangolo di Fibonacci

ancora un altro quadrato

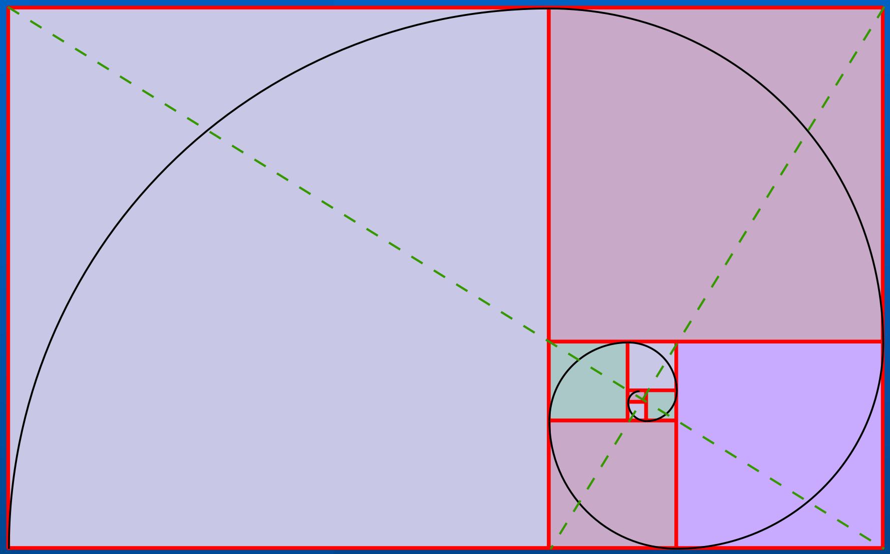


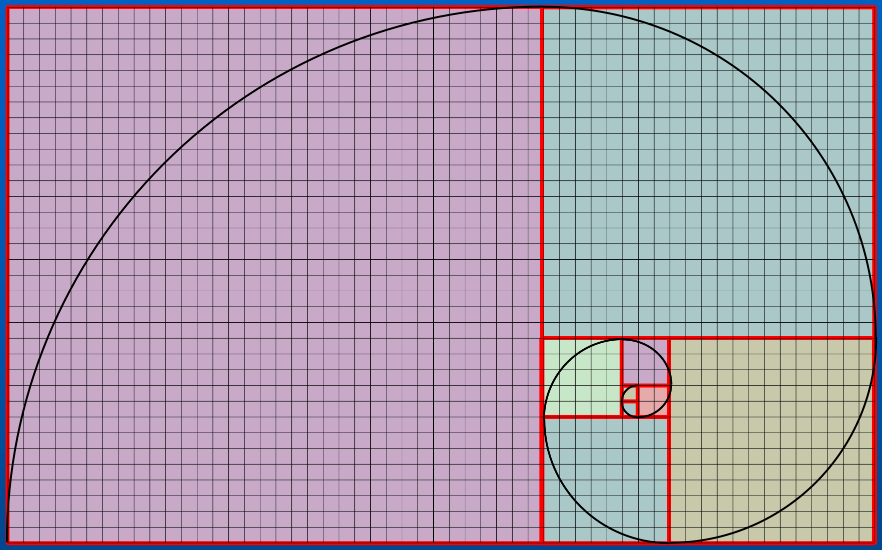
Il Rettangolo di Fibonacci

Cos’ì all’infinito…?? No! : una volta raggiunto il primo termine ci dobbiamo fermare!



Il Rettangolo Aureo e di Fibonacci





Dalle sequenze delle due famiglie di rettangoli è evidente che al crescere del numero dei lati i rettangoli diventano sempre più simili. Se indichiamo con F_n l'ennesimo termine della successione di Fibonacci, al crescere di n il rapporto fra base ed altezza di un rettangolo di Fibonacci, F_n/F_{n-1} si avvicina sempre più al rapporto tra base ed altezze di un rettangolo aureo cioé a φ.

Il valore di φ

Ma quanto vale φ? La relazione fondamentale $\varphi^2 = \varphi + 1$ è un'equazione di secondo grado. Se la dividiamo per φ otteniamo la seguente relazione:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

dalla quale vediamo che φ è senz'altro maggiore di uno ma minore di due. Non solo: $1/\varphi$ è minore di uno ed è uguale alla parte decimale di φ. In effetti la radice positiva dell'equazione di secondo grado è

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi = 1.6180339887498948\ldots$$

ed il suo reciproco

$$\frac{1}{\varphi} = 0.6180339887498948\ldots$$

φ è l'unico numero per il quale la parte decimale è uguale al suo reciproco.

Il valore di φ

n	F_n	F_{n+1}/F_n	F_n/F_{n+1}
1	1	1	1
2	1	1	0.5
3	2	2	0.5
4	3	1.5	0.66666667
5	5	1.66666667	0.5
6	8	1.6	0.625
7	13	1.625	0.61538462
8	21	1.61538462	0.61904762
9	34	1.61904762	0.61764706
10	55	1.61764706	0.61818182
11	89	0.61818182	0.61797753
12	144	1.61797753	0.61805556
13	233	1.61805556	0.61802575
13	377	1.61802575	0.61803713

$$\varphi = 1.6180339887498948\ldots$$

$$\frac{1}{\varphi} = 0.6180339887498948\ldots$$

Curiosità matematiche su φ

A partire dalla relazione fondamentale possiamo calcolare le successive potenze di φ

$$\begin{aligned}
\varphi^2 &= \varphi + 1 \\
\varphi^3 &= \\
\varphi^4 &= \\
\varphi^5 &= \\
\varphi^6 &= \\
\varphi^7 &= \\
\varphi^8 &= \\
\varphi^9 &= \\
\varphi^{10} &=
\end{aligned}$$

Curiosità matematiche su φ

A partire dalla relazione fondamentale possiamo calcolare le successive potenze di φ

$$
\begin{aligned}
\varphi^2 &= \varphi + 1 \\
\varphi^3 &= \varphi^2 + \varphi = \varphi + 1 + \varphi = 2\varphi + 1 \\
\varphi^4 &= \\
\varphi^5 &= \\
\varphi^6 &= \\
\varphi^7 &= \\
\varphi^8 &= \\
\varphi^9 &= \\
\varphi^{10} &=
\end{aligned}
$$

Curiosità matematiche su φ

A partire dalla relazione fondamentale possiamo calcolare le successive potenze di φ

$$\begin{aligned}
\varphi^2 &= \varphi + 1 \\
\varphi^3 &= \varphi^2 + \varphi = \varphi + 1 + \varphi = 2\varphi + 1 \\
\varphi^4 &= 2\varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 2 + \varphi = 3\varphi + 2 \\
\varphi^5 &= \\
\varphi^6 &= \\
\varphi^7 &= \\
\varphi^8 &= \\
\varphi^9 &= \\
\varphi^{10} &=
\end{aligned}$$

Curiosità matematiche su φ

A partire dalla relazione fondamentale possiamo calcolare le successive potenze di φ

$$
\begin{aligned}
\varphi^2 &= \varphi + 1 \\
\varphi^3 &= \varphi^2 + \varphi = \varphi + 1 + \varphi = 2\varphi + 1 \\
\varphi^4 &= 2\varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 2 + \varphi = 3\varphi + 2 \\
\varphi^5 &= 3\varphi^2 + 2\varphi = 3\varphi + 3 + 2\varphi = 5\varphi + 3 \\
\varphi^6 &= \\
\varphi^7 &= \\
\varphi^8 &= \\
\varphi^9 &= \\
\varphi^{10} &=
\end{aligned}
$$

Curiosità matematiche su φ

A partire dalla relazione fondamentale possiamo calcolare le successive potenze di φ

$$
\begin{aligned}
\varphi^2 &= \varphi + 1 \\
\varphi^3 &= \varphi^2 + \varphi = \varphi + 1 + \varphi = 2\varphi + 1 \\
\varphi^4 &= 2\varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 2 + \varphi = 3\varphi + 2 \\
\varphi^5 &= 3\varphi^2 + 2\varphi = 3\varphi + 3 + 2\varphi = 5\varphi + 3 \\
\varphi^6 &= 5\varphi^2 + 3\varphi = 5\varphi + 5 + 3\varphi = 8\varphi + 5 \\
\varphi^7 &= \\
\varphi^8 &= \\
\varphi^9 &= \\
\varphi^{10} &=
\end{aligned}
$$

Curiosità matematiche su φ

A partire dalla relazione fondamentale possiamo calcolare le successive potenze di φ

$$\begin{aligned}
\varphi^2 &= \varphi + 1 \\
\varphi^3 &= \varphi^2 + \varphi = \varphi + 1 + \varphi = 2\varphi + 1 \\
\varphi^4 &= 2\varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 2 + \varphi = 3\varphi + 2 \\
\varphi^5 &= 3\varphi^2 + 2\varphi = 3\varphi + 3 + 2\varphi = 5\varphi + 3 \\
\varphi^6 &= 5\varphi^2 + 3\varphi = 5\varphi + 5 + 3\varphi = 8\varphi + 5 \\
\varphi^7 &= 8\varphi^2 + 5\varphi = 8\varphi + 8 + 5\varphi = 13\varphi + 5 \\
\varphi^8 &= \\
\varphi^9 &= \\
\varphi^{10} &=
\end{aligned}$$

Curiosità matematiche su φ

A partire dalla relazione fondamentale possiamo calcolare le successive potenze di φ

$$
\begin{aligned}
\varphi^2 &= \varphi + 1 \\
\varphi^3 &= \varphi^2 + \varphi = \varphi + 1 + \varphi = 2\varphi + 1 \\
\varphi^4 &= 2\varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 2 + \varphi = 3\varphi + 2 \\
\varphi^5 &= 3\varphi^2 + 2\varphi = 3\varphi + 3 + 2\varphi = 5\varphi + 3 \\
\varphi^6 &= 5\varphi^2 + 3\varphi = 5\varphi + 5 + 3\varphi = 8\varphi + 5 \\
\varphi^7 &= 8\varphi^2 + 5\varphi = 8\varphi + 8 + 5\varphi = 13\varphi + 5 \\
\varphi^8 &= 13\varphi^2 + 8\varphi = 13\varphi + 13 + 5\varphi = 21\varphi + 13 \\
\varphi^9 &= \\
\varphi^{10} &=
\end{aligned}
$$

Curiosità matematiche su φ

A partire dalla relazione fondamentale possiamo calcolare le successive potenze di φ

$$\begin{aligned}
\varphi^2 &= \varphi + 1 \\
\varphi^3 &= \varphi^2 + \varphi = \varphi + 1 + \varphi = 2\varphi + 1 \\
\varphi^4 &= 2\varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 2 + \varphi = 3\varphi + 2 \\
\varphi^5 &= 3\varphi^2 + 2\varphi = 3\varphi + 3 + 2\varphi = 5\varphi + 3 \\
\varphi^6 &= 5\varphi^2 + 3\varphi = 5\varphi + 5 + 3\varphi = 8\varphi + 5 \\
\varphi^7 &= 8\varphi^2 + 5\varphi = 8\varphi + 8 + 5\varphi = 13\varphi + 5 \\
\varphi^8 &= 13\varphi^2 + 8\varphi = 13\varphi + 13 + 5\varphi = 21\varphi + 13 \\
\varphi^9 &= 21\varphi^2 + 13\varphi = 21\varphi + 21 + 13\varphi = 34\varphi + 21 \\
\varphi^{10} &=
\end{aligned}$$

Curiosità matematiche su φ

A partire dalla relazione fondamentale possiamo calcolare le successive potenze di φ

$$
\begin{aligned}
\varphi^2 &= \varphi + 1 \\
\varphi^3 &= \varphi^2 + \varphi = \varphi + 1 + \varphi = 2\varphi + 1 \\
\varphi^4 &= 2\varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 2 + \varphi = 3\varphi + 2 \\
\varphi^5 &= 3\varphi^2 + 2\varphi = 3\varphi + 3 + 2\varphi = 5\varphi + 3 \\
\varphi^6 &= 5\varphi^2 + 3\varphi = 5\varphi + 5 + 3\varphi = 8\varphi + 5 \\
\varphi^7 &= 8\varphi^2 + 5\varphi = 8\varphi + 8 + 5\varphi = 13\varphi + 5 \\
\varphi^8 &= 13\varphi^2 + 8\varphi = 13\varphi + 13 + 5\varphi = 21\varphi + 13 \\
\varphi^9 &= 21\varphi^2 + 13\varphi = 21\varphi + 21 + 13\varphi = 34\varphi + 21 \\
\varphi^{10} &= 34\varphi^2 + 21\varphi = 34\varphi + 34 + 21\varphi = 55\varphi + 34
\end{aligned}
$$

Curiosità matematiche su φ

A partire dalla relazione fondamentale possiamo calcolare le successive potenze di φ

$$
\begin{aligned}
\varphi^2 &= \varphi + 1 && = F_2\varphi + F_1\\
\varphi^3 &= \varphi^2 + \varphi = \varphi + 1 + \varphi = 2\varphi + 1 && = F_3\varphi + F_2\\
\varphi^4 &= 2\varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 2 + \varphi = 3\varphi + 2 && = F_4\varphi + F_3\\
\varphi^5 &= 3\varphi^2 + 2\varphi = 3\varphi + 3 + 2\varphi = 5\varphi + 3 && = F_5\varphi + F_4\\
\varphi^6 &= 5\varphi^2 + 3\varphi = 5\varphi + 5 + 3\varphi = 8\varphi + 5 && = F_6\varphi + F_5\\
\varphi^7 &= 8\varphi^2 + 5\varphi = 8\varphi + 8 + 5\varphi = 13\varphi + 5 && = F_7\varphi + F_6\\
\varphi^8 &= 13\varphi^2 + 8\varphi = 13\varphi + 13 + 5\varphi = 21\varphi + 13 && = F_8\varphi + F_7\\
\varphi^9 &= 21\varphi^2 + 13\varphi = 21\varphi + 21 + 13\varphi = 34\varphi + 21 && = F_9\varphi + F_8\\
\varphi^{10} &= 34\varphi^2 + 21\varphi = 34\varphi + 34 + 21\varphi = 55\varphi + 34 && = F_{10}\varphi + F_9
\end{aligned}
$$

Curiosità matematiche su φ

Sempre a partire dalla relazione fondamentale divisa per φ abbiamo il seguente sviluppo:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

Curiosità matematiche su φ

Sempre a partire dalla relazione fondamentale divisa per φ abbiamo il seguente sviluppo:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}$$

Curiosità matematiche su φ

Sempre a partire dalla relazione fondamentale divisa per φ abbiamo il seguente sviluppo:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}}$$

Curiosità matematiche su φ

Sempre a partire dalla relazione fondamentale divisa per φ abbiamo il seguente sviluppo:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}}} = \cdots$$

Curiosità matematiche su φ

Sempre a partire dalla relazione fondamentale divisa per φ abbiamo il seguente sviluppo:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varphi}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varphi}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varphi}}}} = \cdots$$

Siamo in presenza dello sviluppo un frazioni continue di φ. Se ci fermiamo ad un certo punto ponendo nello sviluppo $\varphi = 1$ otteniamo

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}}$$

Curiosità matematiche su φ

Sempre a partire dalla relazione fondamentale divisa per φ abbiamo il seguente sviluppo:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varphi}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varphi}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varphi}}}} = \cdots$$

Siamo in presenza dello sviluppo un frazioni continue di φ. Se ci fermiamo ad un certo punto ponendo nello sviluppo $\varphi = 1$ otteniamo

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{3}}}}}$$

Curiosità matematiche su φ

Sempre a partire dalla relazione fondamentale divisa per φ abbiamo il seguente sviluppo:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}}} = \cdots$$

Siamo in presenza dello sviluppo un frazioni continue di φ. Se ci fermiamo ad un certo punto ponendo nello sviluppo $\varphi = 1$ otteniamo

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{5}}}}$$

Curiosità matematiche su φ

Sempre a partire dalla relazione fondamentale divisa per φ abbiamo il seguente sviluppo:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varphi}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varphi}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varphi}}}} = \cdots$$

Siamo in presenza dello sviluppo un frazioni continue di φ. Se ci fermiamo ad un certo punto ponendo nello sviluppo $\varphi = 1$ otteniamo

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{3}}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{3}{5}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{5}{8}}}$$

Curiosità matematiche su φ

Sempre a partire dalla relazione fondamentale divisa per φ abbiamo il seguente sviluppo:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}}} = \cdots$$

Siamo in presenza dello sviluppo un frazioni continue di φ. Se ci fermiamo ad un certo punto ponendo nello sviluppo $\varphi = 1$ otteniamo

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{3}{5}}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{5}{8}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1+\frac{8}{13}}$$

Curiosità matematiche su φ

Sempre a partire dalla relazione fondamentale divisa per φ abbiamo il seguente sviluppo:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}}} = \cdots$$

Siamo in presenza dello sviluppo un frazioni continue di φ. Se ci fermiamo ad un certo punto ponendo nello sviluppo $\varphi = 1$ otteniamo

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{3}{5}}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{5}{8}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1+\frac{8}{13}} = 1 + \frac{13}{21}$$

Curiosità matematiche su φ

Sempre a partire dalla relazione fondamentale divisa per φ abbiamo il seguente sviluppo:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}}} = \cdots$$

Siamo in presenza dello sviluppo un frazioni continue di φ. Se ci fermiamo ad un certo punto ponendo nello sviluppo $\varphi = 1$ otteniamo

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{3}{5}}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{5}{8}}}$$

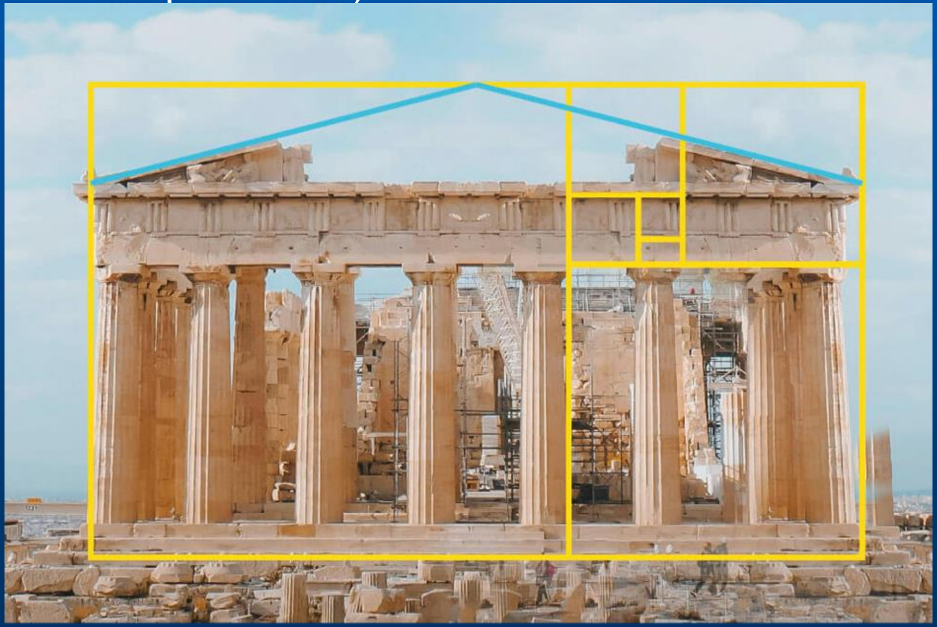
$$= 1 + \frac{1}{1+\frac{8}{13}} = 1 + \frac{13}{21} = \frac{34}{21}$$

Questa strana proprietà è sfruttata dalla natura nella diposizione delle foglie e dei semi delle piante

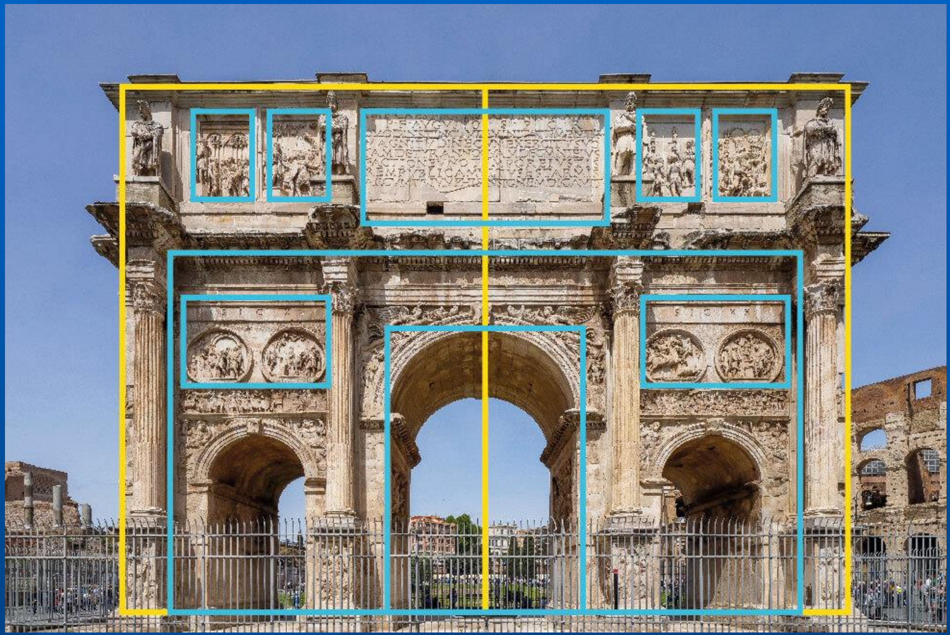
La *Sezione Aurea* e l'Arte

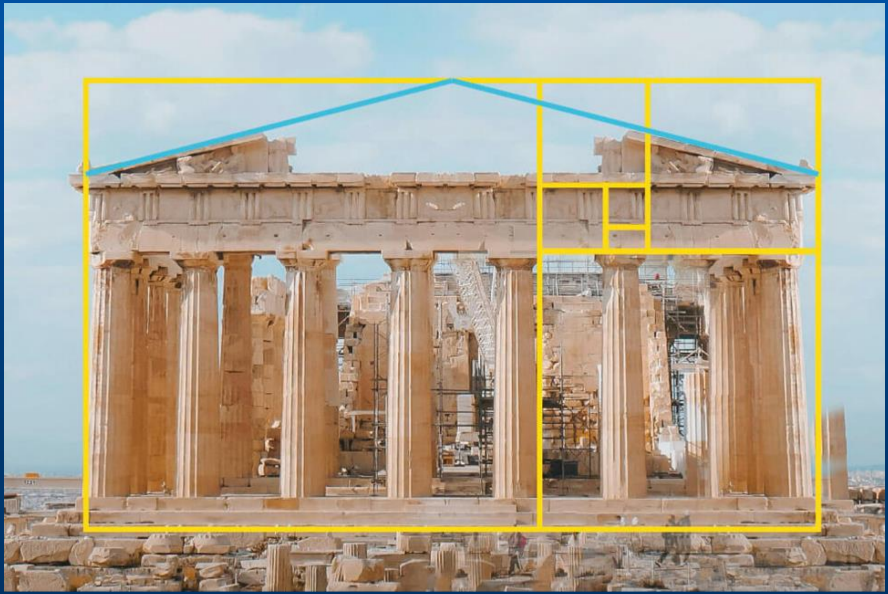
Ma perché il rettangolo aureo viene ritenuto il più armonioso fra tutti i rettangoli? In realtà da numerosi e seri studi psicologici si è notato che il rettangolo aureo non viene considerato dalla gente comune più armonioso di qualsiasi altro rettangolo che abbia un rapporto base/altezza compreso fra 1.2 e 2. Ciò è dovuto probabilmente al fatto che il nostro campo visivo orizzontale è di circa 120 gradi mentre quello verticale di 80 gradi, cioè un rapporto di 3 a 2. Qualsiasi rettangolo che abbia un rapporto vicino a 1.5 non richiede un particolare sforzo per essere ''inquadrato'' dal nostro sistema visivo (considerazione personale).

Comunque dopo la pubblicazione della '*De Divina Proporzione*' di Luca Pacioli è scoppiato letteralmente l'interesse per il rapporto aureo. Non solo cominciano ad apparire opere che esplicitamente si rifanno al suo valore per la loro composizione ma si comincia a vedere la sua presenza un po' ovunque. Keplero ne fu addirittura ossessionato: la vedeva nel rapporto tra le distanze dei vari pianeti. Un esempio a mio avviso eclatante è quello del Partenone di Atene.



La *Sezione Aurea* e l’Arte





La *Sezione Aurea* e l'Arte

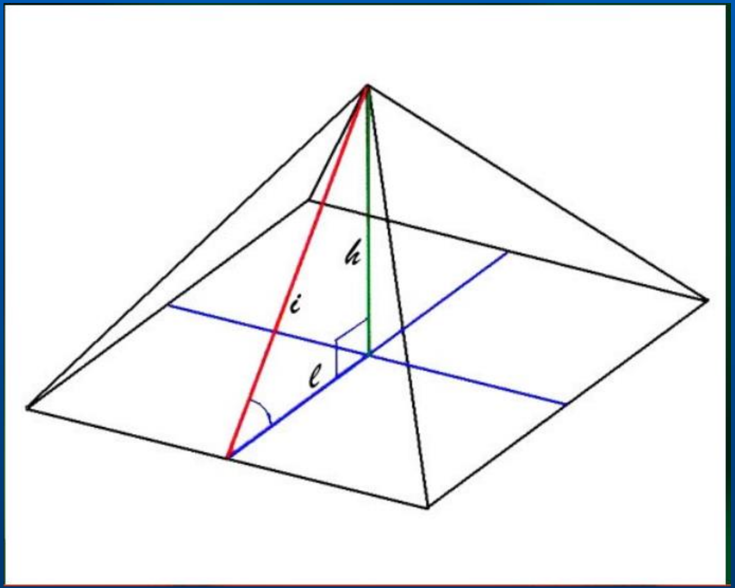
La piramide di Cheope

Spesso si è parlato della piramide di Cheope come esempio di applicazione del rapporto aureo nella sua realizzazione. Per esempio su un sito di 'Corso di Disegno e Storia dell'Arte' ad un certo punto si legge:

La sezione aurea potrebbe essere stata utilizzata nella Piramide di Cheope. Il rapporto aureo sussiste fra il semilato della piramide *l* e l'altezza della facciata triangolare i costruibile sulla stessa.

Considerando che l'altezza è di 146,804 m e il lato di 230,560 m e che l'unità di misura utilizzata è pari a 2,089 m (4 volte il braccio egiziano di 0,52/0,53 m) se ne deduce che il lato di base misurava 110 u e l'altezza 70 u. Se si considera metà della piramide i due cateti sono 70 u e 55 u: l'ipotenusa vale, allora, 89 u.

Nella serie di Fibonacci i numeri 55 e 89 sono presenti e sono in rapporto aureo. Questo significa che, se non a livello teorico, gli egiziani conoscevano e utilizzavano le proporzioni auree in modo empirico.



La *Sezione Aurea* e l'Arte

La piramide di Cheope

La spiegazione data, anche se affascinante, mi sembra molto artificiosa. Esiste però una spigazione più semplice per le dimensioni della piramide: gli Egizi per effettuare le misure di lunghezze utilizzavano un cilindro che veniva trascinato e fatto rotolare e contavano i numeri di giri. Per misurare le altezze invece, non potendo trascinare il cilindro verso l'alto li sovrapponevano. Di conseguenza la loro unità di misura orizzontale era esattamente π volte quella verticale Il rapporto tra perimetro ed altezza della piramide è

$$\frac{\mathbf{4 \times 230.560}}{\mathbf{146.804}} = 6.2857$$

Che è quasi esattamente uguale a 2π (6.2832). Si potrebbe obiettare che Gli Egizi non conoscevano il valore di π con questa precisione. C'è da dire però che la procedura adottata per le misure di lunghezza non richiedono affatto la conoscenza del valore di π .

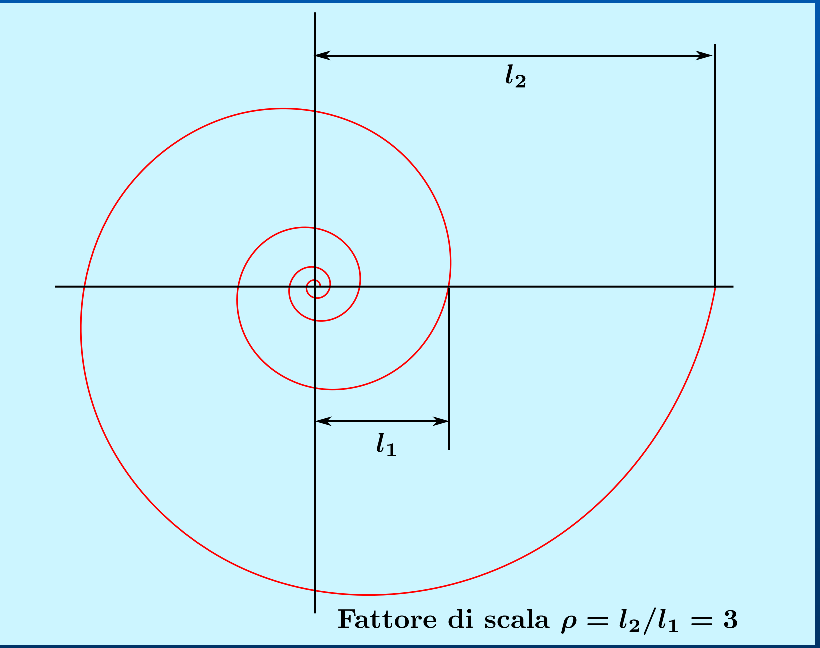
La *Sezione Aurea* e l'Arte

Un caso in cui viene utilizzata di proposito la sezione aurea è quello di *Il Sacramento dell'Ultima Cena* di Salvator Dalì. Il quadro è un perfetto rettangolo aureo ed inoltre c'è un enorme dodecaedro, con il suo legame al rapporto aureo, che fluttua sopra la tavola e la circonda.

La *Sezione Aurea* e la Natura
Le Spirali

Come nel caso dell'arte anche nel caso delle spirali si tende a vedere spirali auree o di Fibonacci anche dove non ci sono. La spirale aurea è una delle possibili spirali logaritmiche, cioè spirali che mantengono inalterata la loro forma quando vengono ingrandite o rimpicciolite. Nel caso della spirale aurea un ingrandimento di un fattore φ produce una spirale identica a quella originaria ma ruotata di 90 gradi; un ingrandimento di un fattore $\varphi^4 = 2 + 3\varphi \simeq 6.85$ produce una spirale identica e senza rotazione. .

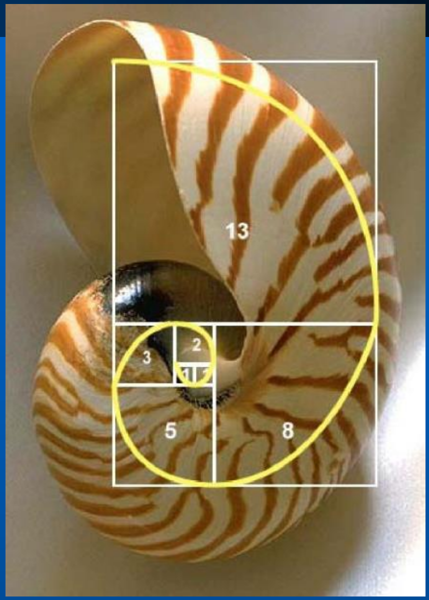
Le spirali auree hanno tutte un fattore di scale circa uguale a 6.85. La spirale logaritmica della figura ha un fattore di scala uguale a 3.
Le spirali logaritmiche che si trovano in natura hanno generalmente un fattore di scala inferiore a 3.



La *Sezione Aurea* e la Natura

Le Spirali

La spirale aurea si presenta anche nelle corna del muflone... e nella coda dell'ippocampo.

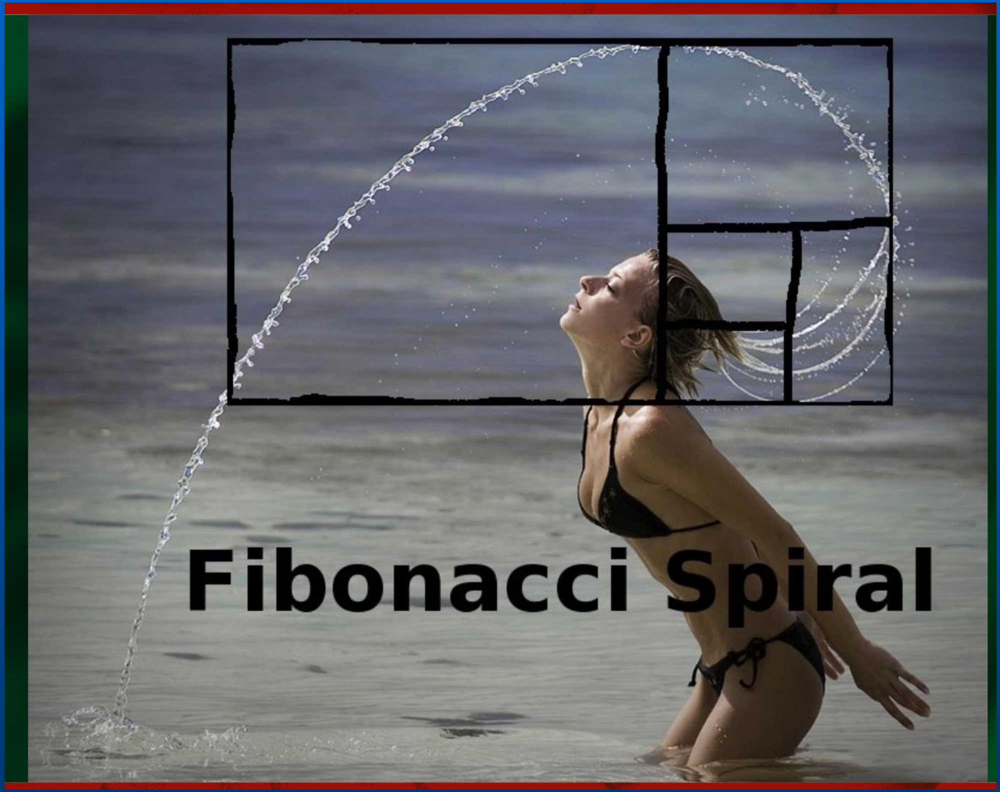


Il più celebre esempio di sezione aurea in natura è costituito dalla conchiglia del Nautilus, una perfetta spirale logaritmica.

La *Sezione Aurea* e la Natura

Le Spirali

Si tende a vedere spirali auree un po' dappertutto. Nell'esempio la spirale formata dall'acqua è ben lontana da una spirale aurea. Quasi certamente non è nemmeno una spirale logaritmica o addirittura non è nemmeno una spirale *tout court*: la sua forma dipende fortemente dal modo e dalla velocità con cui viene ruotata la testa!

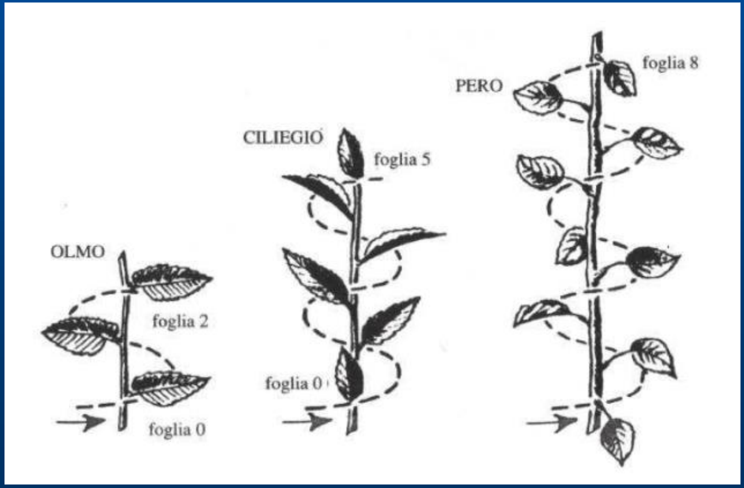


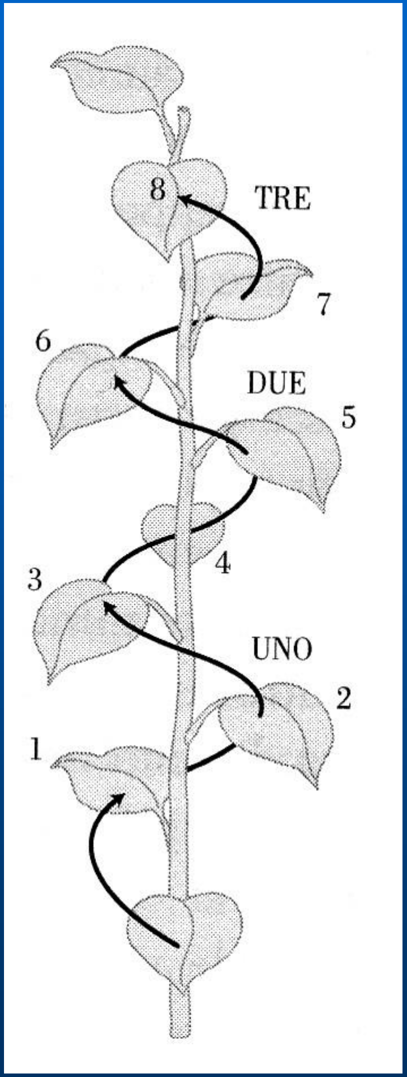
La *Sezione Aurea* e la Natura

Le Piante e i Fiori

Nel regno vegetale le foglie sui rami ed i rami lungo il tronco tendono a disporsi in modo da rendere massima l'esposizione al sole, alla pioggia e all'aria. La fillotassi è il modo caratteristico e costante per ogni specie vegetale, secondo cui le foglie si inseriscono sui rami, o secondo cui si dispongono i semi in alcuni fiori. Se in una pianta si risale lungo il fusto cominciando dalla foglia più in basso e si contando sia il numero di foglie che il numero di rotazioni attorno al fusto, sino a che non si raggiunge la foglia la cui direzione e la stessa della foglia di partenza, il numero di rotazioni sarà un numero di Fibonacci come pure il numero di foglie.

Il rapporto giri su foglie è il '*quoziente di fillotassi*' che è uguale a 1 /2 per l'olmo ed il tiglio, 1/3 per il nocciolo ed il faggio, 2/5 per il ciliegio e 3/8 per il pero.



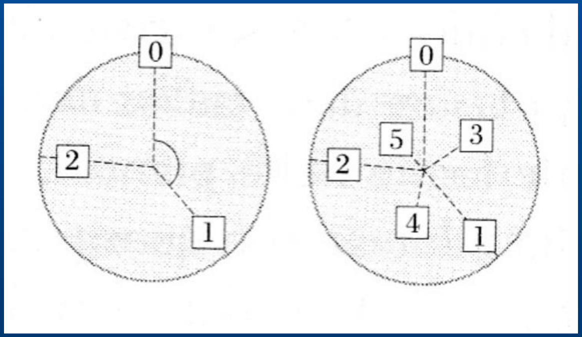


La *Sezione Aurea* e la Natura

Le Piante e i Fiori

La nascita e lo sviluppo delle foglie lungo il fusto segue uno schema ben preciso: essa ha luogo a partire da un tessuto giovane a forma di cuneo chiamato '*meristèma*'. Sguendo lo schema della figura nasce per prima la foglia numero 0 e successivamente le altre numerate da 1 a 5… L'angolo formato da una foglia e la successiva, detto *angolo di divergenza*, è un angolo costante. La strategia seguita dalla natura è quella di evitare possibilmente angoli che siano in rapporto semplice con l'angolo giro per evitare che una foglia faccia ombra ad una foglia precedente. La soluzione ideale è quella che il rapporto tra angolo giro e angolo di divergenza sia un numero irrazionale, anzi il numero più irrazionale di tutti e cioè φ.

L'angolo ideale è pertanto uguale a 360/φ = 222.5 gradi o meglio il suo complementare ossia a 360 – 222.5 = 137.5 gradi.
Ora 360 - 360/φ = 360(φ - 1)/ φ = 360/φ^2. Ma φ^2 è circa il rapporto tra due numeri di Fibonacci a distanza di 2 nella sequenza. In effetti abbiamo



$\mathbf{3/8 \times 360 = \mathit{F}_4/\mathit{F}_6 \times 360 = 135}$ molto vicino a 137.5

$\mathbf{2/5 \times 360 = \mathit{F}_3/\mathit{F}_5 \times 360 = 144}$ abbastanza vicino a 137.5

$\mathbf{1/3 \times 360 = \mathit{F}_2/\mathit{F}_4 \times 360 = 120}$ non lontanissimo da 137.5

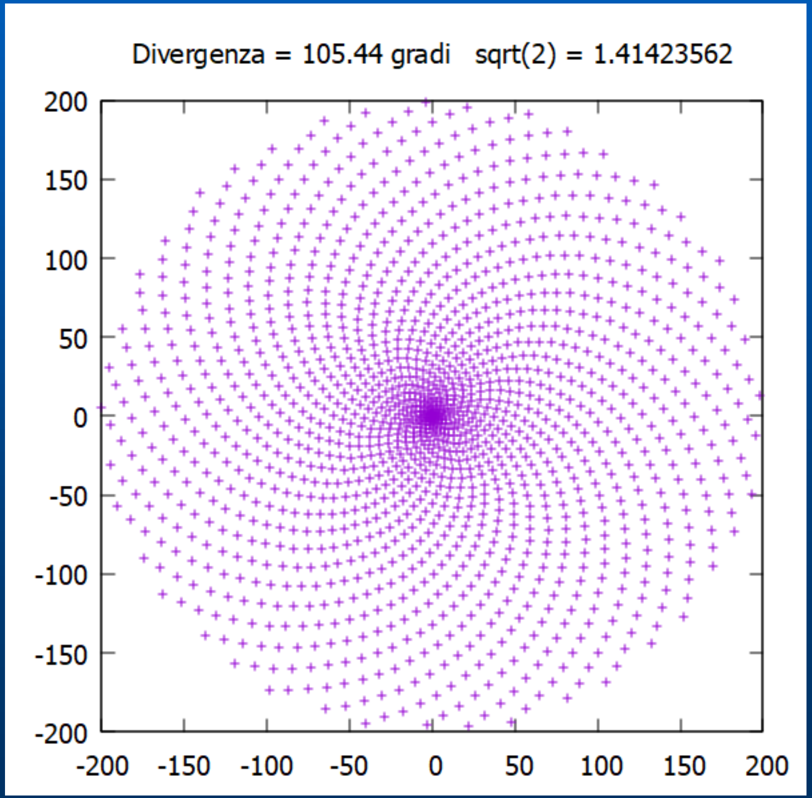
Da notare ancora che il rapporto 222.5/137.5 è uguale a φ

La *Sezione Aurea* e la Natura

Le Piante e i Fiori

Lo sviluppo delle foglie o dei rami lungo il tronco si estende anche verticalmente per cui non è strettamente necessario che l'angolo di divergenza sia uguale a 137.5 gradi. Tuttavia per le infiorescenze che si sviluppano essenzialmente su un piano si ha un problema di ottimizzazione dello spazio a disposizione e ciò implica come vedremo che l'angolo di divergenza sia proprio uguale a 137.5 gradi.

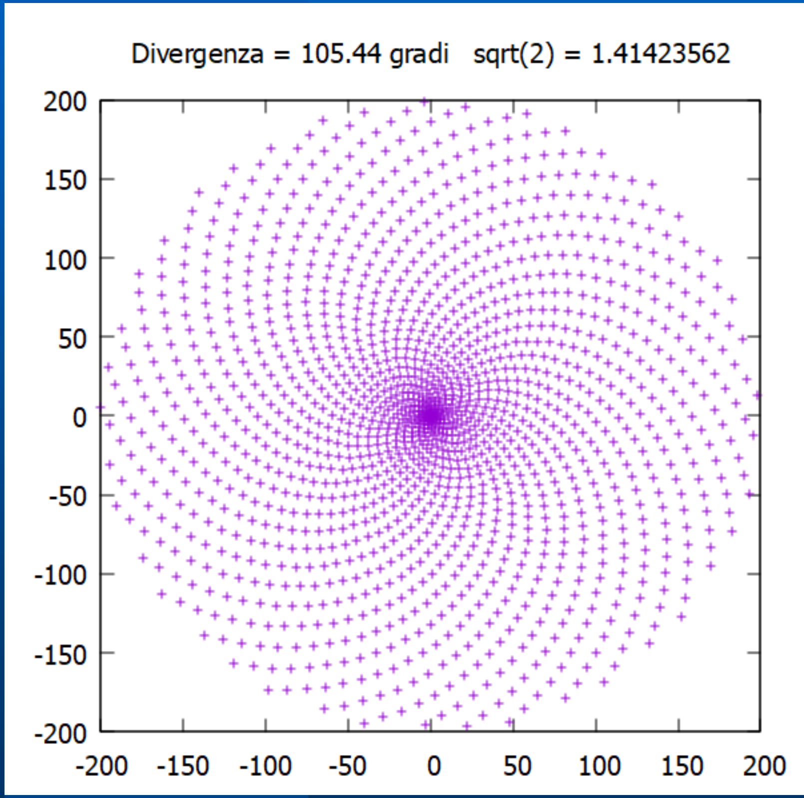
La figura mostra il risultato della simulazione di una crescita usando come parametro il numero irrazionale $\sqrt{2}$ corrispondente ad una angolo di divergenza di 105.44 gradi. Si nota una decisa tendenza alla generazioni di spirali ruotanti in senso orario.



La *Sezione Aurea* e la Natura

Le Piante e i Fiori

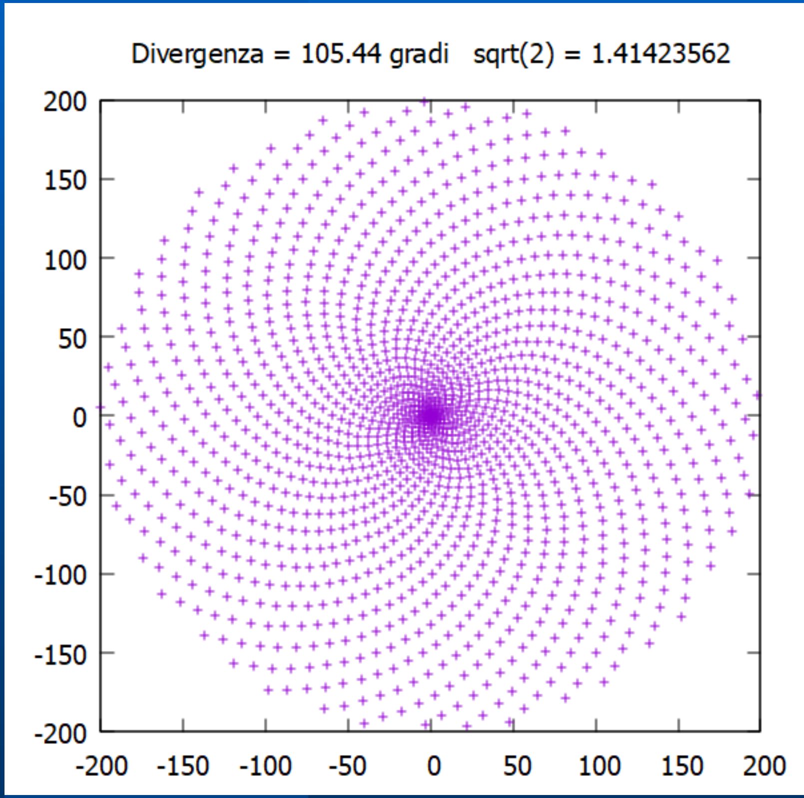
Cambiando leggermente il parametro di controllo e passando da $\sqrt{2} = 1.41423562$

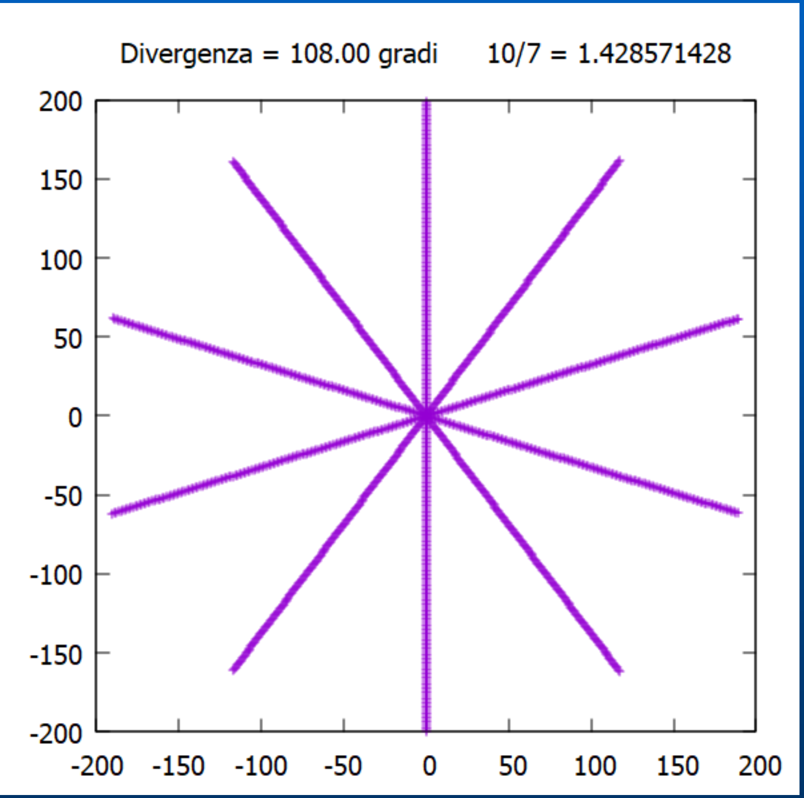


La *Sezione Aurea* e la Natura

Le Piante e i Fiori

Cambiando leggermente il parametro di controllo e passando da $\sqrt{2} = 1.41423562$ a $10/7 = 1.428571428$ che è un numero razionale si ottiene:



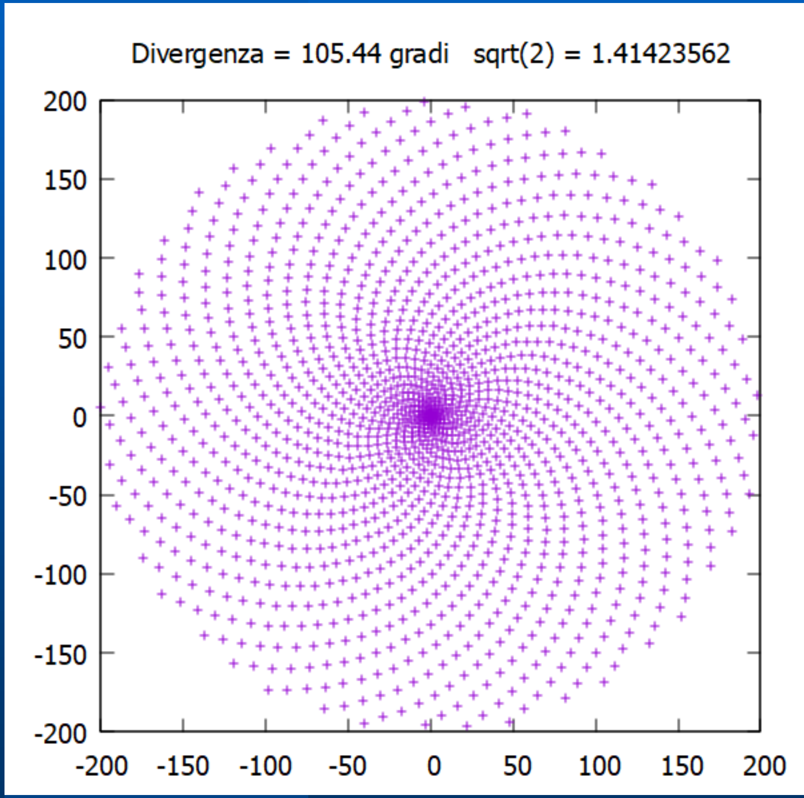


Come si vede i numeri razionali vanno assolutamente evitati!

La *Sezione Aurea* e la Natura

Le Piante e i Fiori

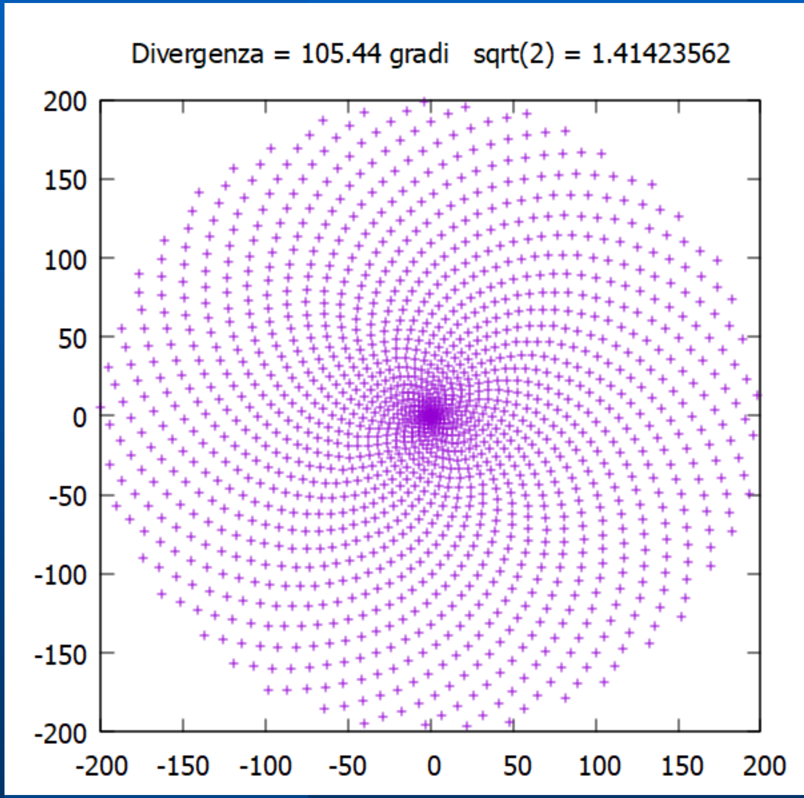
Se anziché usare come parametro di controllo $\sqrt{2}$ cui corrisponde un angolo di divergenza minore di 137.5

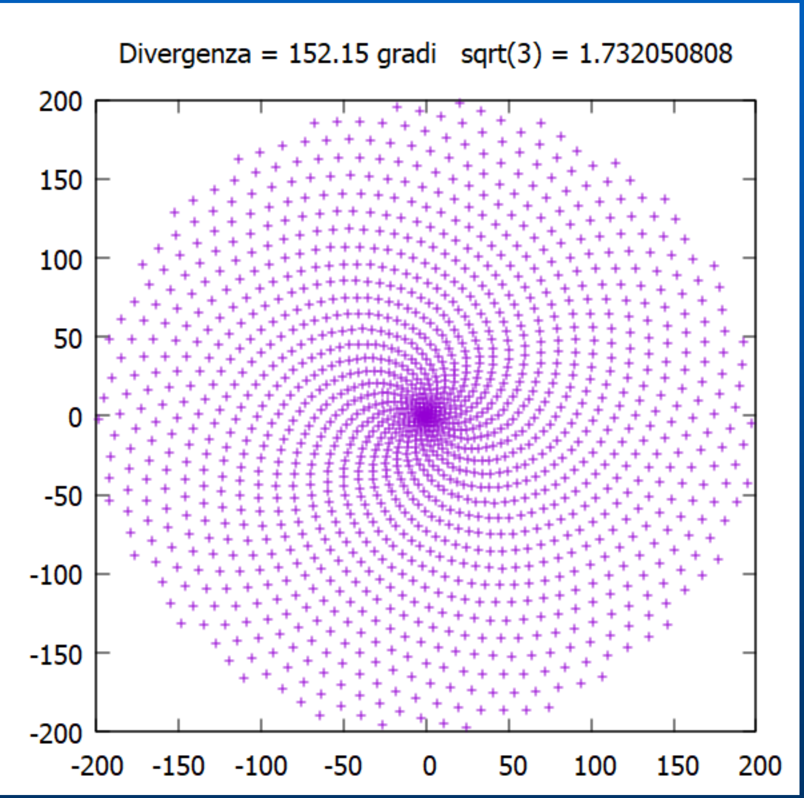


La *Sezione Aurea* e la Natura

Le Piante e i Fiori

Se anziché usare come parametro di controllo $\sqrt{2}$ cui corrisponde un angolo di divergenza minore di 137.5 utilizziamo $\sqrt{3}$ con un angolo di divergenza maggiore di 137.5 ...



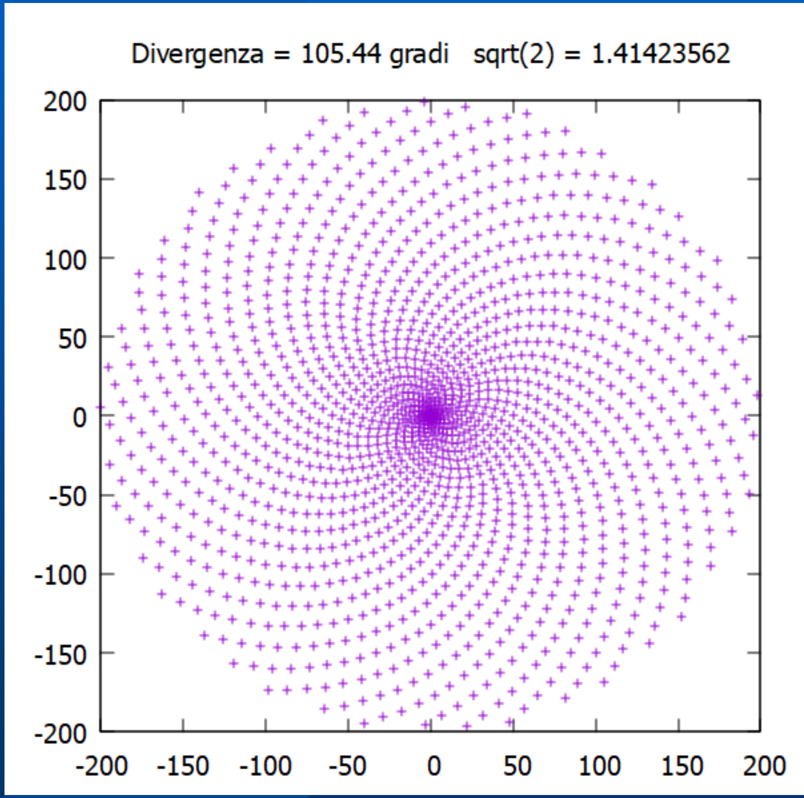


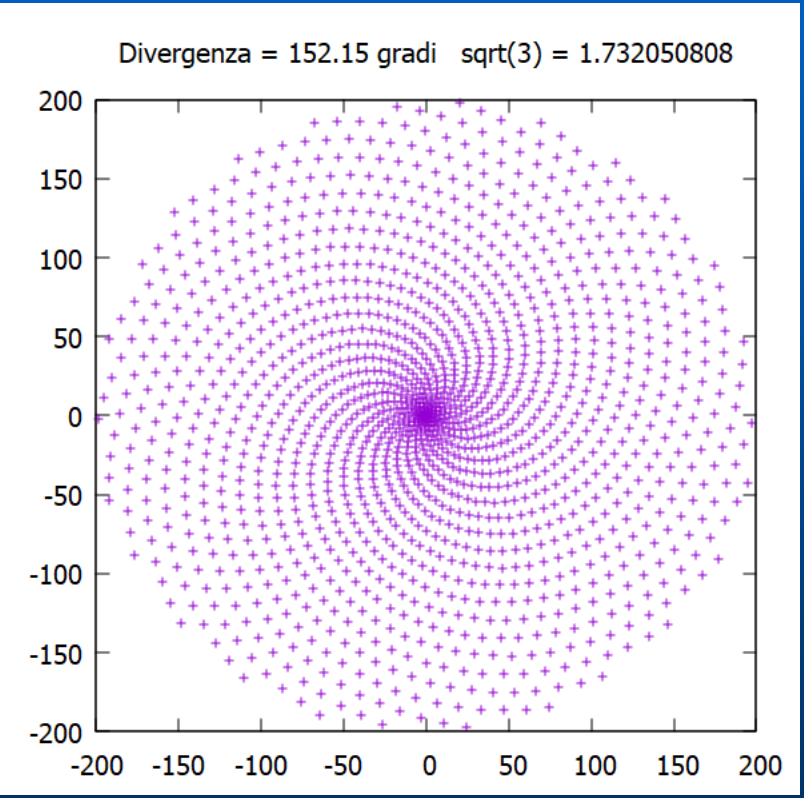
otteniamo ancora una serie di spirali ma che questa volta ruotano in senso antiorario.

La *Sezione Aurea* e la Natura

Le Piante e i Fiori

Ci sorge il sospetto che ci sia un numero irrazionale compreso fra $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ per cui le due famiglie di spirali si *confondono*.

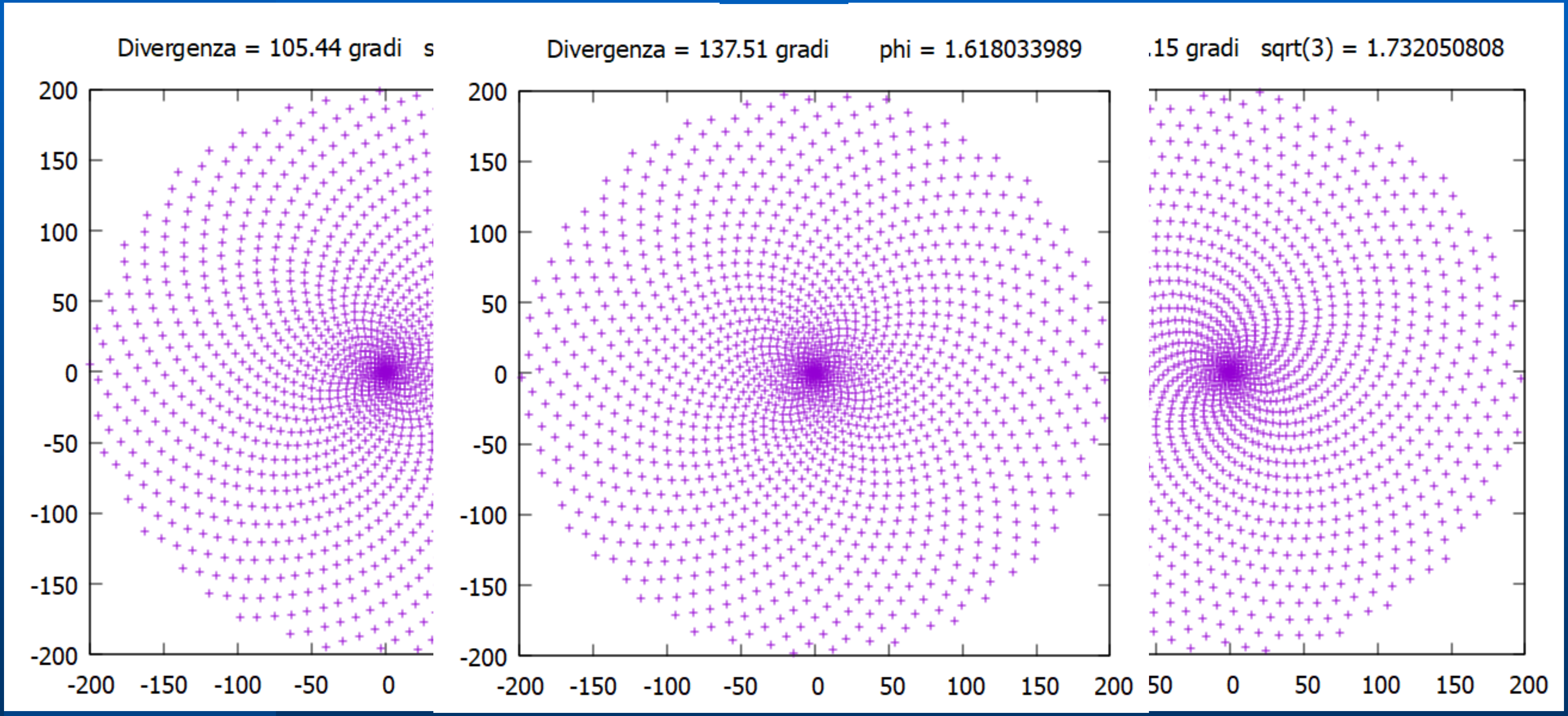




La *Sezione Aurea* e la Natura

Le Piante e i Fiori

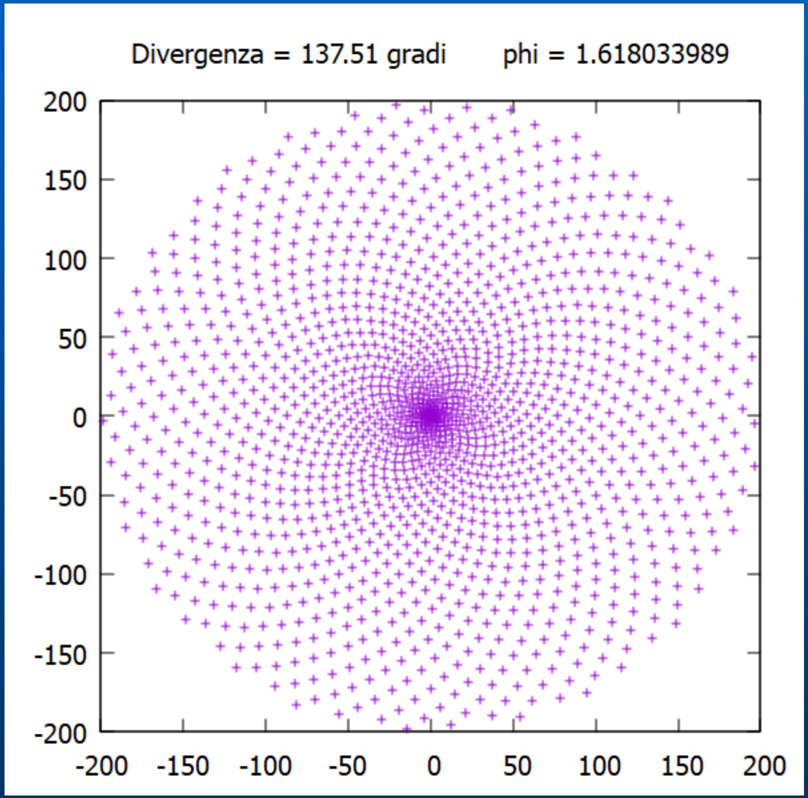
Ci sorge il sospetto che ci sia un numero irrazionale compreso fra $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ per cui le due famiglie di spirali si *confondono*. Se avete pensato a φ avete indovinato!



La *Sezione Aurea* e la Natura

Le Piante e i Fiori

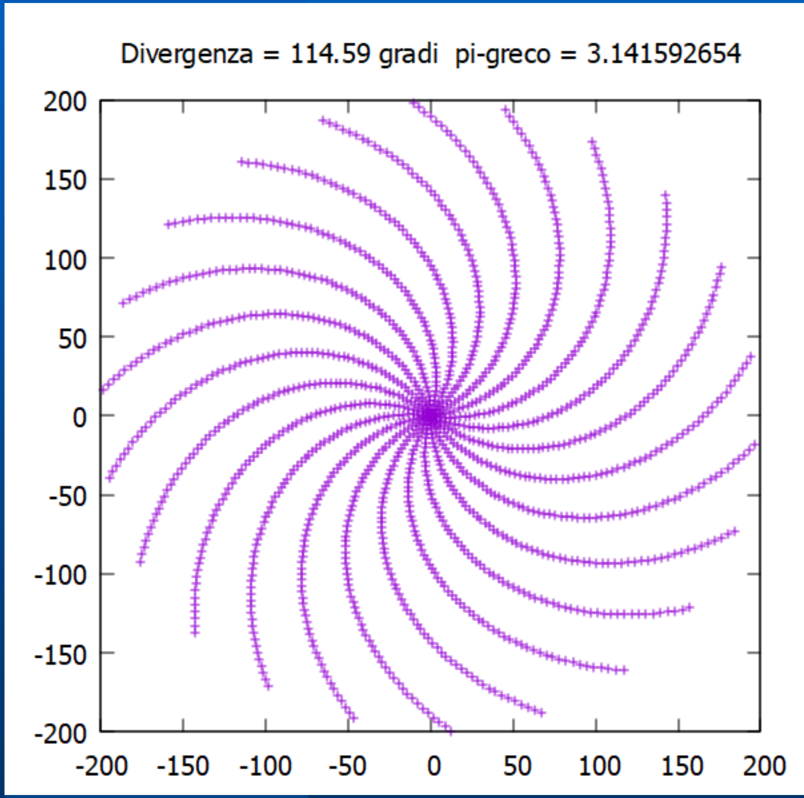
Ci sorge il sospetto che ci sia un numero irrazionale compreso fra $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ per cui le due famiglie di spirali si *confondono*. Se avete pensato a φ avete indovinato!

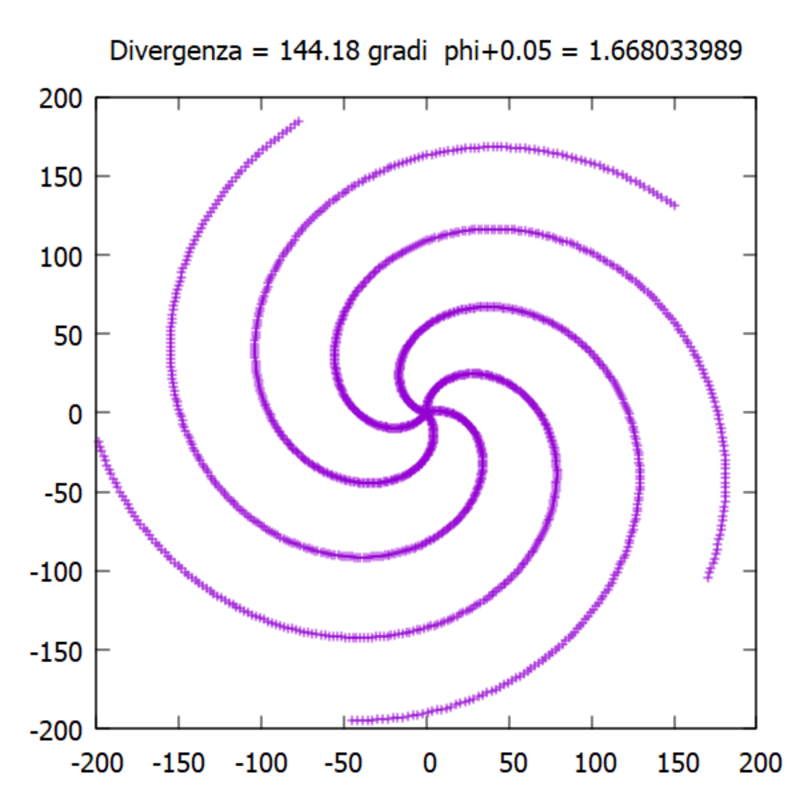


La *Sezione Aurea* e la Natura

Le Piante e i Fiori

Qualche curiosità a riguardo del parametro di controllo





La *Sezione Aurea* e la Natura

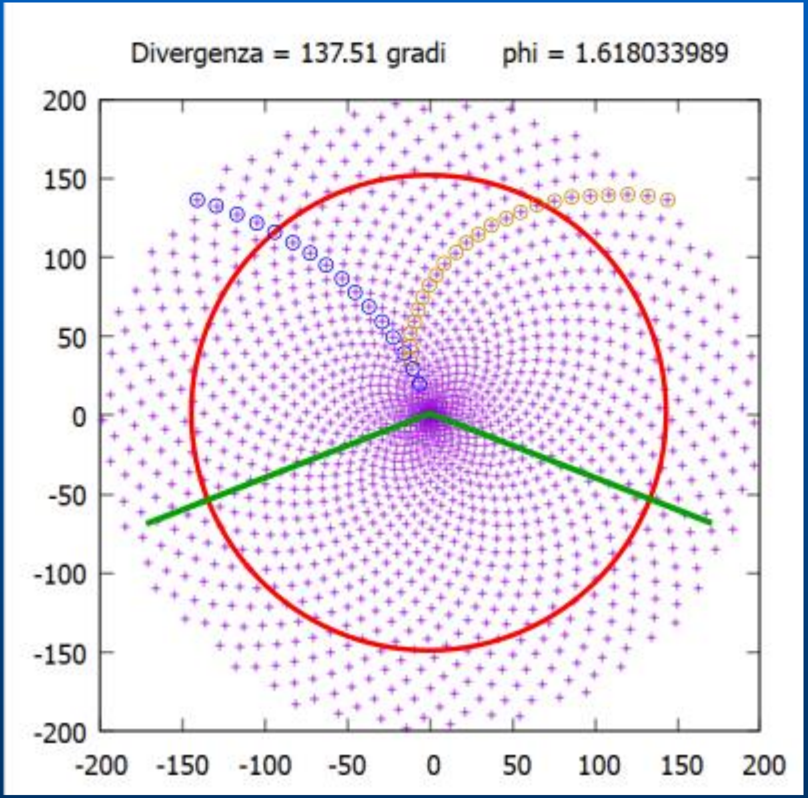
Le Piante e i Fiori

Torniamo a φ. Si notano chiaramente due famiglie di spirali, una destrogira e l'altra sinistrogira. Tracciamo una circonferenza centrata sul *fiore* e l'angolo di 137.5 gradi.

Se contiamo il numero di spirali sinistrogire otteniamo 34 mentre se contiamo il numero di quelle destrogire otteniamo 55: due numeri di Fibonacci consecutivi!

Ma perchè?

Il fatto è il numero di intersezioni delle spirali con la parte superiore della circonferenza diviso il numero di intersezioni con la parte inferiore della circonferenza deve essere uguale a φ (ricordate che $\varphi = 225.5/137.5$) e il rapporto tra due numeri di Fibonacci consecutivi è la migliore approssimazione di φ. La loro somma, che è il numero complessivo delle spirali, è a sua volta un numero di Fibonacci!

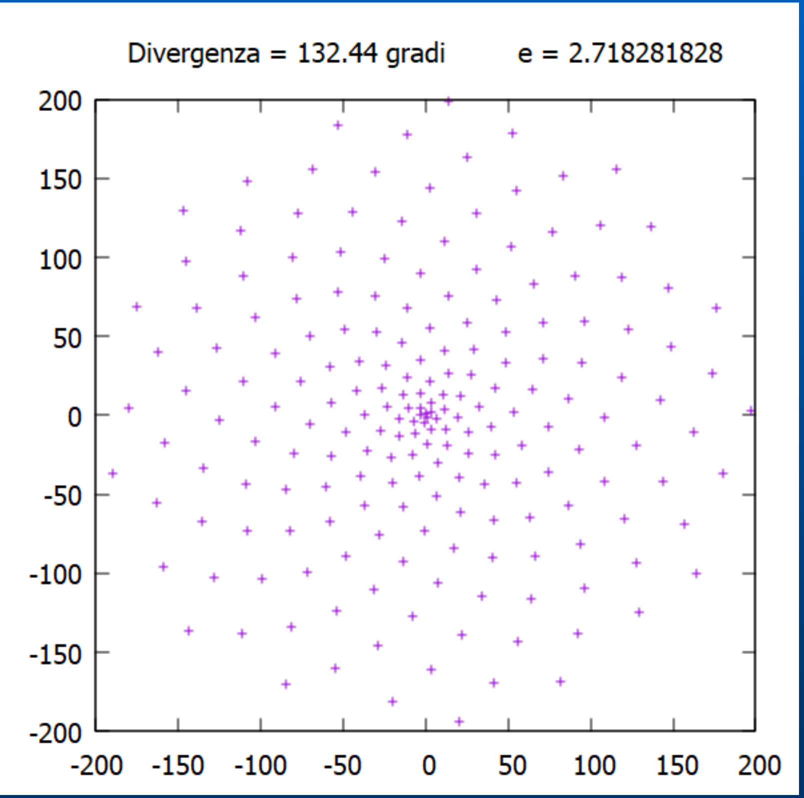


La *Sezione Aurea* e la Natura

Le Piante e i Fiori

Ma perchè fra tutti i numeri di Fibonacci che abbiamo ottenuto proprio 34 e 55 per il numero di spirali? Non c'è alcun motivo per questa scelta, tutto dipende dalla dimensione dei semi.

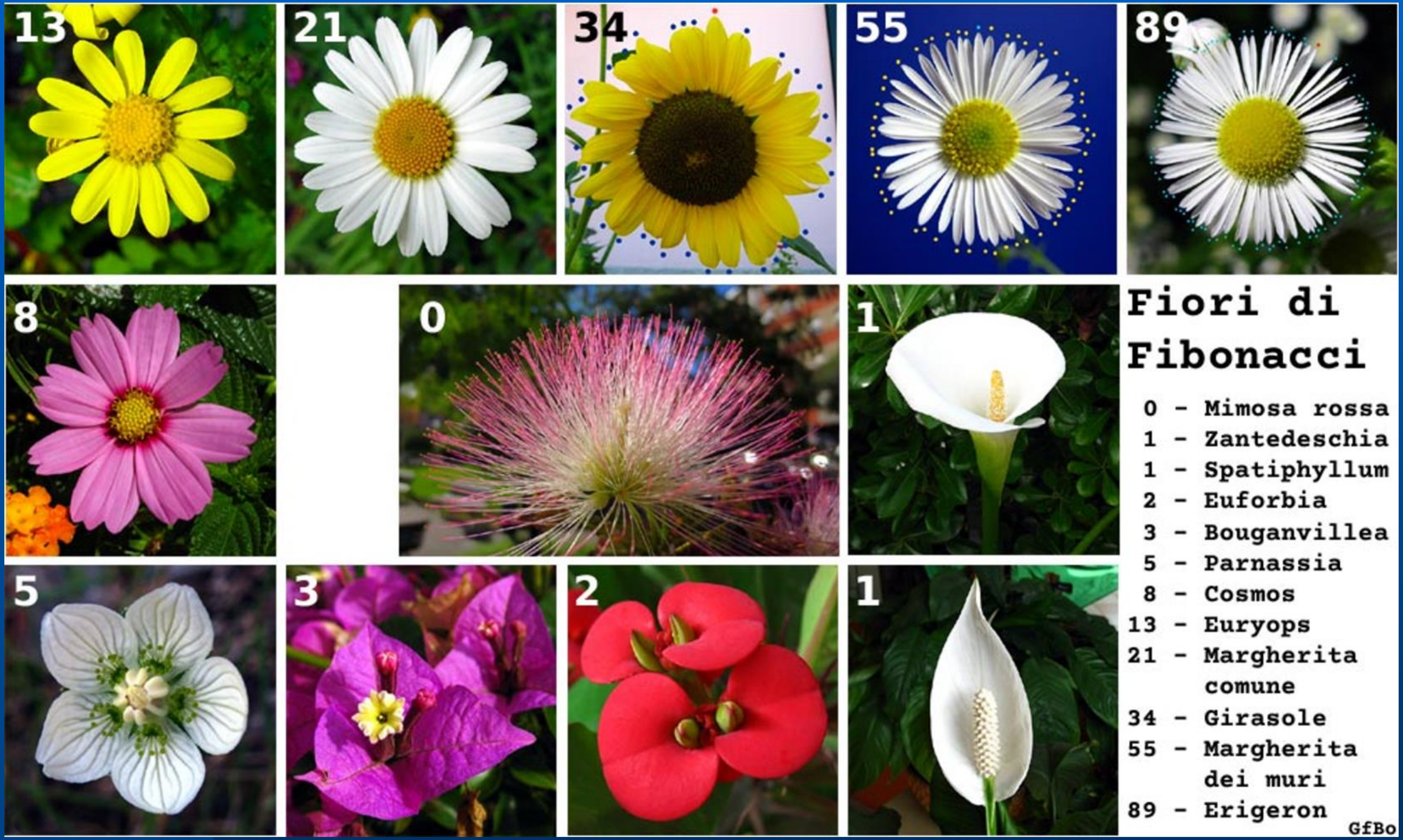
Semi di grosse dimensioni richiedono più spazio e generano un numero minore di spirali come mostra chiaramente la figura nella quale si contano risper-rivamente 13 e 21 spirali, sempre comunque due numeri di Fibonacci consecutivi.



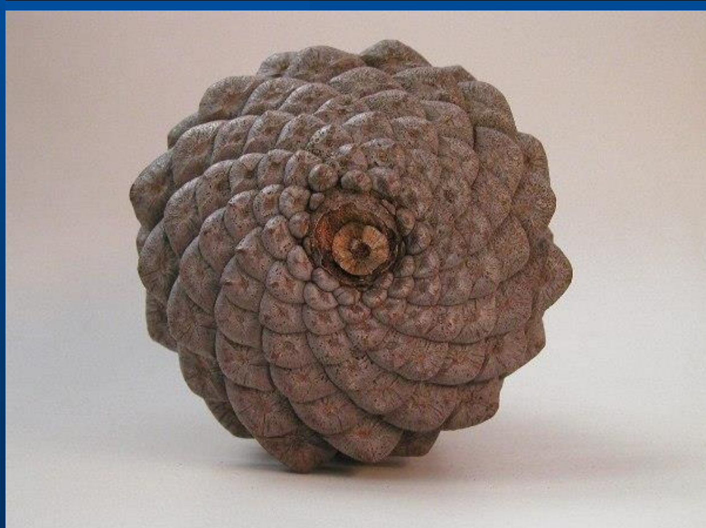
E adesso alcuni esempi forniti dalla natura

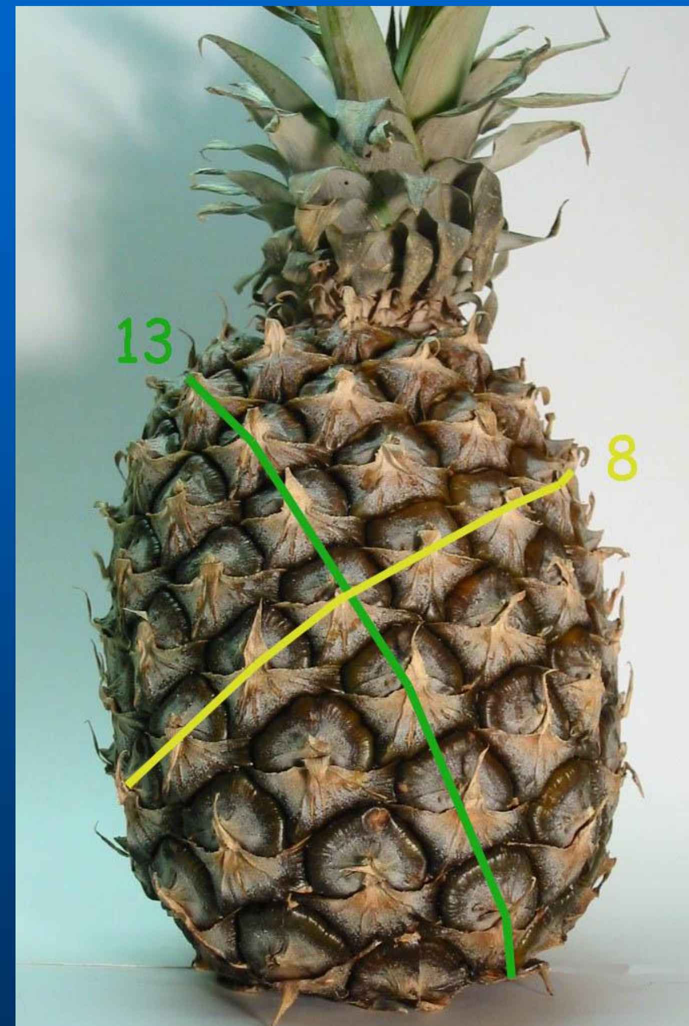
La *Sezione Aurea* e la Natura

Le Piante e i Fiori



La *Sezione Aurea* e la Natura



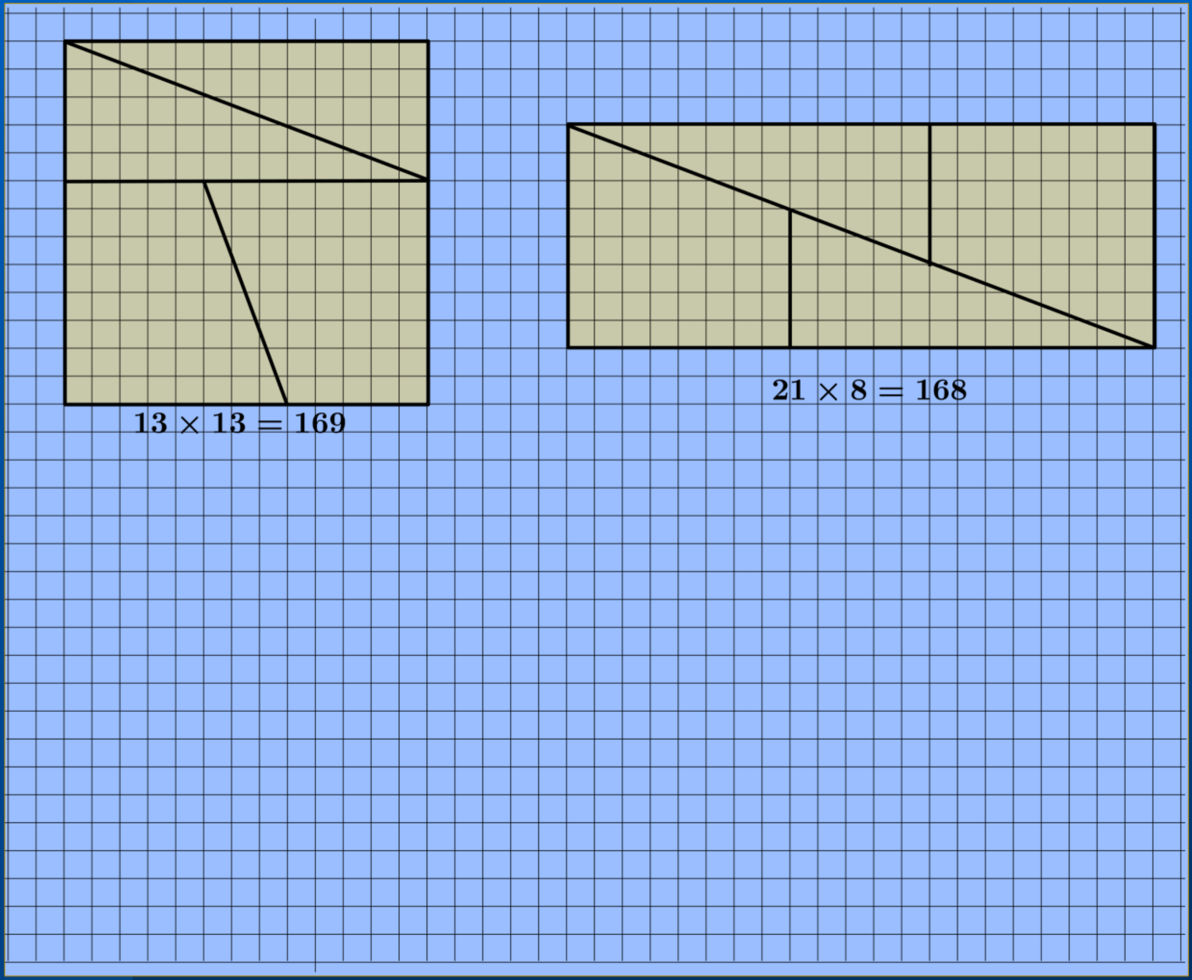


La *Sezione Aurea* e la Natura

Una curiosità: in Andalusia c’è una centrale solare in cui si sfrutta la *tecnica* della natura per posizionare gli spechi in modo che non si facciano ombra l’un l’altro

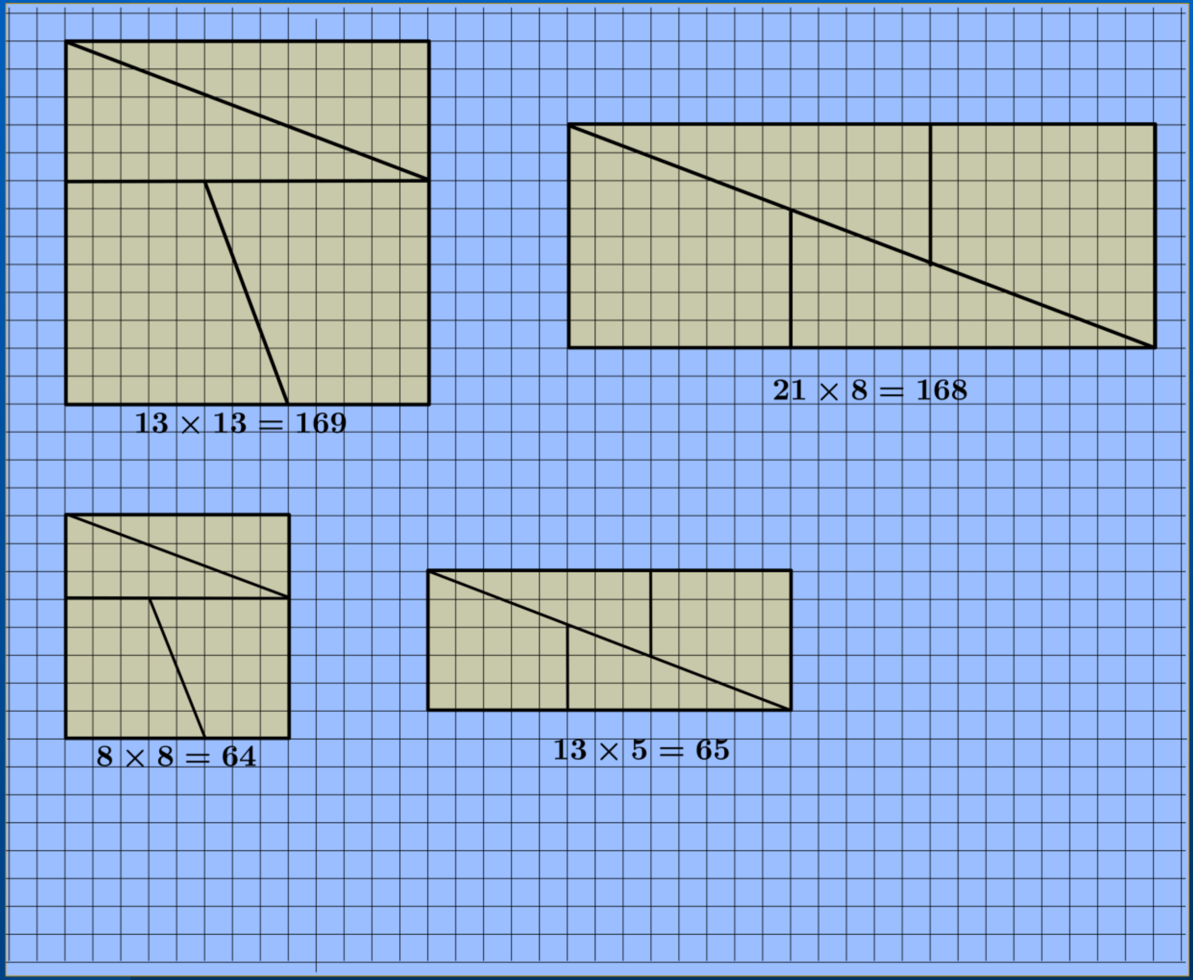
La *Serie di Fibonacci*

Un paradosso geometrico



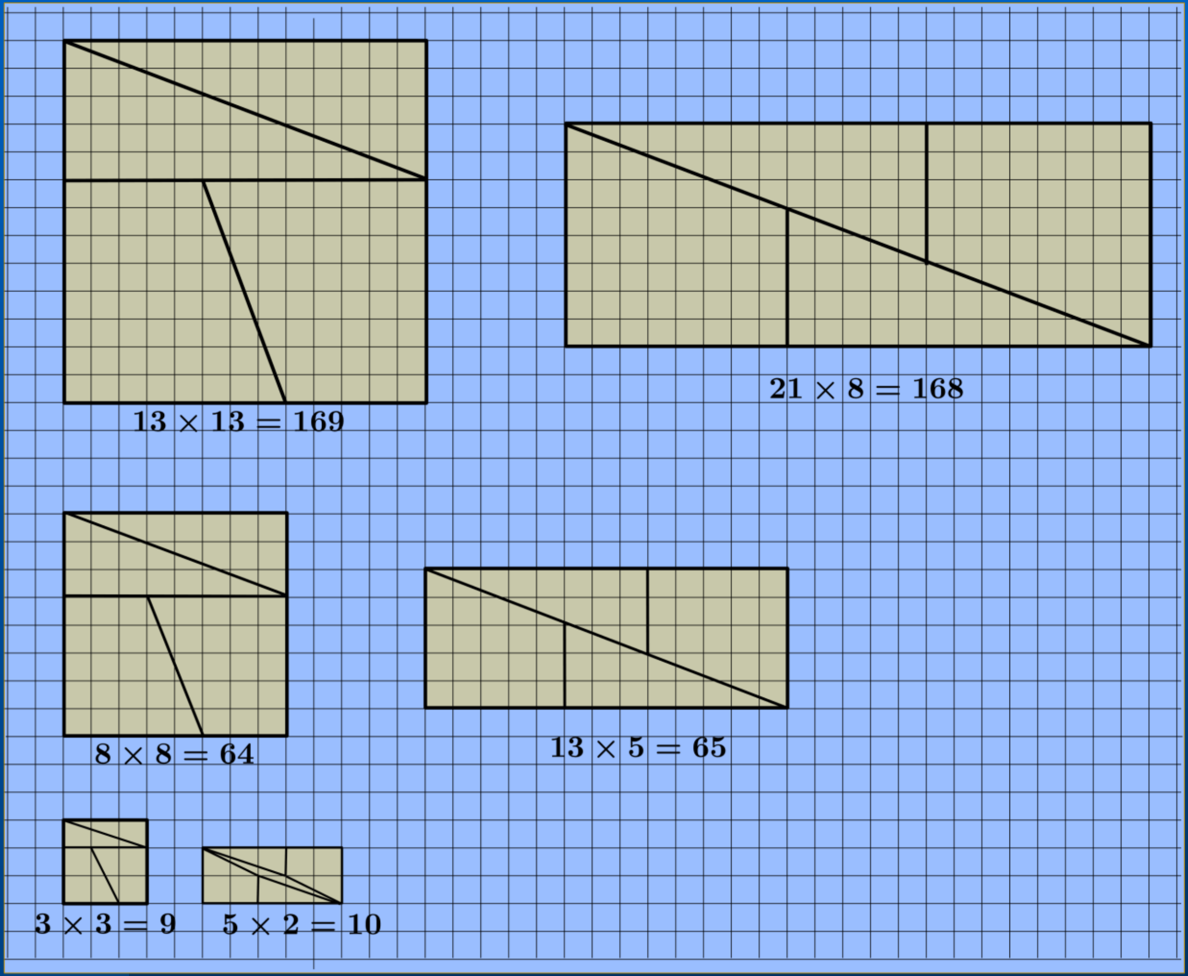
La *Serie di Fibonacci* ura

Un paradosso geometrico



La *Serie di Fibonacci* ura

Un paradosso geometrico



Alcune proprietà matematiche di φ e della successione di Fibonacci

Perchè il numero φ viene definito il più irrazionale dei numeri? Ogni numero irrazionale che sia la radice quadrata di un intero ammette una rappresentazione semplice in frazioni continue. Per esempio la radice quadrata di 2 ha la seguante rappresentazione .

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{1+1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}}}}}$$

che genera le seguenti approssimazioni di $\sqrt{2}$:

$$1+\frac{1}{1+1} = \frac{3}{2} = 1.5; \quad 1+\frac{1}{1+\frac{3}{2}} = 1+\frac{2}{5} = \frac{7}{5} = 1.4; \quad 1+\frac{1}{1+\frac{7}{5}} = \frac{17}{12} = 1.4166666$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{17}{12}} = \frac{41}{29} = 1.41331; \quad 1+\frac{1}{1+\frac{41}{29}} = \frac{99}{70} = 1.4142857$$

Notiamo che l'approssimazione successiva si ottiene dalla precedente costruendo una frazione che ha al numeratore il numeratore precedente più il doppio del denominatore e per denominatore il denominatore precedente sommato al numeratore.

Alcune proprietà matematiche di φ e della successione di Fibonacci

L'algoritmo per la $\sqrt{2}$ converge molto rapidamente tanto che l'ottavo termine fornisce il risultato corretto con più di sette cifre di precisione: $\sqrt{2} \simeq 1393/985 = 1.414213198$ invece di 1.414213562.
Lo stesso sviluppo in frazioni continue di φ fornisce all'ottavo passaggio il seguente valore: $\varphi \simeq 55/34 = 1.617647059$ invece di 1.618033989 e cioè con nemmeno quattro cifre di precisione.

La spiegazione di questo comportamento sta nella presenza dei 2 nello sviluppo in frazioni continue della radice quadrata di due che fa sì che le frazioni che ne approssimano il valore crescano molto rapidamente. Lo sviluppo in frazioni continue di φ produce rapporti di numeri di Fibonacci che crescono molto più lentamente. Lo sviluppo in frazioni continue di un qualsiasi altro irrazionale prevede necessariamente almeno alcuni fattori diversi da 1 e pertanto convergono più rapidamente di quello di φ.

Comunque la migliore approssimazione razionale di φ è quella fornita dal rapporto di due numeri di Fibonacci consecutivi che converge molto lentamente. Ne deduciamo φ non si lascia approssimare facilmente da un numero razionale e ciò giustifica l'appellativo datogli:

φ è il numero più irrazionale di tutti gli irrazionali

Qualche considerazione

Qualche mia considerazione personale:

Numero: serve a contare. In questo senso esistono solamente gli interi e lo zero non è un numero. Ma serve anche a calcolare: si può addizionare, moltiplicare, a volte dividere e a volte sottrarre. Se vogliamo generalizzare la divisione dobbiamo però inventarci le frazioni: rapporto tra numeri. Se vogliamo generalizzare la sottrazione dobbiamo inventare i numeri negativi e con essi lo zero.

Però: Possiamo sommare, moltiplicare, dividere e sottrarre le frazioni ottenendo altre frazioni: le frazioni godono delle stesse proprietà dei numeri "naturali": perché non chiamarle numeri?

Di alcuni numeri possiamo estrarre le radici quadrate, cubiche ecc.. ma non possiamo estrarre le radici di qualsiasi numero. il rapporto tra diagonale e lato di un quadrato non può esser espresso come rapporto tra due numeri razionali. Ci inventiamo allora gli irrazionali. E la radice quadrata dei numeri negativi? Ci inventiamo gli immaginari e poi i complessi. Ma un'equazione di grado superiore al quarto grado non sempre ha soluzione nel campo dei numeri fin qui costruito: ci inventiamo allora i numeri algebrici, ma si dimostra che alcuni numeri, come il pi greco e la base dei logaritmi naturali, non sono neppure algebrici e ci inventiamo così infine i numeri trascendenti. La cosa strana è che sappiamo per certo che i numeri trascendenti sono di un'infinità superiore a quella dei numeri algebrici. Ciò nonostante i numeri trascendenti che conosciamo sono molto pochi. Insomma numero è un ente matematico che gode di alcune proprietà: somma, sottrazione, moltiplicazione, associatività, ecc.. Qualsiasi cosa o ente che goda di tutte queste proprietà è un numero. Turro può essere rappresentato con un numero: un documento di word, una fotografia, un video ecc. a ben guardare sono dei numeri! Anche le dimostrazioni ed i teoremi sono numeri (basta codificarle in qualche modo) ed in quanto tali analizzabili aritmeticamente stabilendone dei limiti (Goedel). Alla fin fine tutto è un numero e siamo tornati a Pitagora.

Qualche considerazione

Il legame tra la sezione aurea φ e Fibonacci è stato scoperto la prima volta da Keplero nel 1611 (dice Marco Livio forse anche prima da un italiano rimasto anonimo) ma dimostrata anche se non completamente dal matematico scozzese Robert Simson (1687-1768).
Il Pozzo di San Patrizio, opera di Antonio da Sangallo, è stato costruito tra il 1527 e il 1537.
Accostare la sezione aurea ai numeri di Fibonacci prima del 1611 è dal punti di vista storico estremamente scorretto!! Quindi titoli del tipo: Uno studio sul Pozzo di San Patrizio rivela: 'Dietro c'è la sequenza di Fibonacci' andrebbe accuratamente evitata! Attenzione poi alla numeralogia: con π, la base e dei logaritmi naturali, con altri numeri noti e semplici si può ottenere praticamente di tutto. Per esempio 6 π^5 è uguale a 1836.118 che è il rapporto tra ma massa del protone e dell'elettrone (1836.153) con un errore inferiore a 2 parti su 100000. Inutile dire che 6 π^5 non c'entra nulla con tale rapporto: si tratta di una pura e semplice coincidenza.
Notevole è anche il valore di 6/5 φ^2 = 3.141640780 (π = 3.141592654).